3ª Unità

operazioni dirette e semplificazioni in N

4. Operazione di addizione
5. Operazione di moltiplicazione
6. Operazione di elevazione a potenza

Matematica di base - 3ª Unità del libro N

vincenzovitale@integernumbers.org

http://www.integernumbers.org

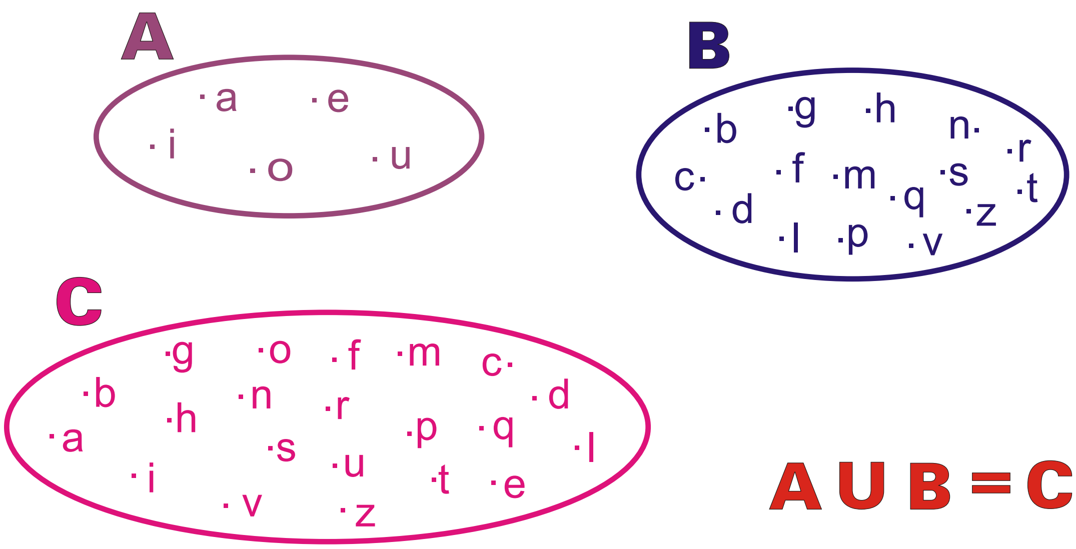
Vitale Vincenzo

4. Operazione di addizione

4.1 L'operazione di addizione in N

Esercizio 1
Fate l'unione dei seguenti insiemi:
- l'insieme A delle vocali;
- l'insieme B delle consonanti.

Uniamo i due insiemi A e B, seguendo i procedimenti esposti nel paragrafo 1.2.



Si ottiene in questo modo l'insieme C delle lettere dell'alfabeto.

Adesso però vogliamo ottenere qualcos'altro:
stabilire a quale classe di equivalenza appartiene l'insieme unione di due insiemi dati.

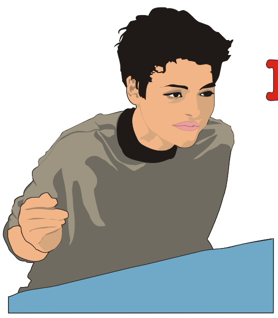
Nel caso in cui gli insiemi di partenza sono disgiunti, questa operazione viene indicata apportando delle modifiche ai simboli.

- Al simbolo di unione si sostituisce il segno più.
- Alle lettere dell'alfabeto, che contraddistinguono gli insiemi dati, si sostituiscono i numeri naturali che indicano le loro classi di equivalenza.

(Per gli insiemi disgiunti si veda il paragrafo 1.2).

Effettuando le modifiche nel caso dell'esercizio 1, si avrà il seguente simbolismo:

$$A \cup B = C$$
$$5 + 16 = 21$$



Definizioni

- Si dice **operazione di addizione** il conteggio delle unità dell'insieme unione di due o più insiemi disgiunti ;
- i numeri da addizionare si dicono **addendi**;
- il risultato dell'addizione si dice **somma** o totale.

Per ottenere la somma di due addendi si può procedere nel modo seguente.
Si prenda in considerazione la semiretta dei numeri naturali (si veda il paragrafo 2.4); ponendosi nel punto di origine, ci si sposti a destra di tante unità quante ne indicano gli addendi.
Il punto di arrivo indicherà il risultato cercato.
Considerando l'esercizio 1 ed eseguendo l'addizione in questo modo si otterrà come risultato il numero 21. Si veda la figura 1 seguente.

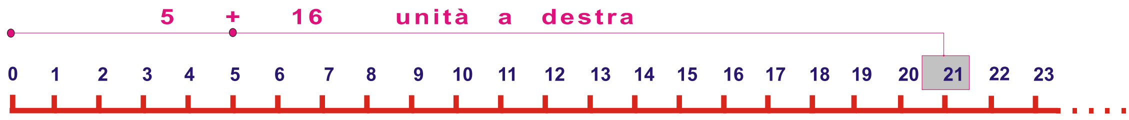


fig.1

Se gli addendi da addizionare sono più di due, si calcola la somma del primo col secondo, il numero ottenuto si somma al terzo addendo e così via fino all'ultimo addendo, come nell'esempio seguente:

$$12+15+23+10 = 27+23+10 = 50+10 = 60$$

Se gli addendi sono tutti uguali ad 1 , procedendo in questo modo, si otterrà la successione dei numeri naturali. (Si veda il capitolo 2) .

$$1+1+1+1+1+1+...=2+1+1+1+1+...=3+1+1+1+...=4+1+1+...$$

Cosicché:
ogni numero naturale è uguale al precedente più 1 .

Per eseguire le operazioni di addizione più complesse si può ricorrere al già noto algoritmo dell'addizione oppure all'uso di una calcolatrice.

Si osservi il riquadro della figura 2 seguente.

$$a + b = c \qquad a;b;c \in N$$

OPERAZIONE DI ADDIZIONE IN N

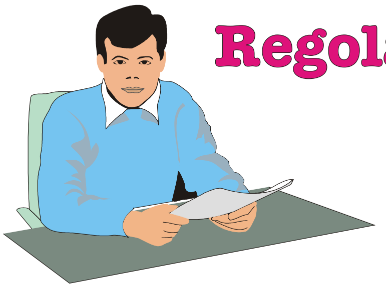
fig.2

Per il simbolo $\in$ si veda il paragrafo 1.1.
Esso indica che le lettere dell'alfabeto a,b,c rappresentano dei numeri naturali.

Definizioni

- Si dice che l'espressione **a+b=c è una uguaglianza,** perché c'è il simbolo = ;
- la parte che precede il simbolo di uguaglianza si dice **primo membro**; la parte che lo segue si dice **secondo membro**.

Poiché a primo membro c'è il segno + , l'uguaglianza della figura 2 rappresenta l'operazione di addizione.
Pertanto le lettere a,b che compaiono a primo membro rappresentano due addendi e la lettera c del secondo membro la loro somma.



Regola

Le lettere dell'alfabeto si mettono al posto dei numeri tutte le volte che si devono esprimere delle proprietà valide per qualsiasi valore numerico.

4.2 Semplificazioni del 1° e del 2° ordine

Tenendo conto delle definizioni espresse nel paragrafo precedente, contare le unità di un insieme equivale ad addizionare una dopo l'altra le sue unità.
In accordo con questo concetto è necessario considerare anche un'altra componente che interviene con questa operazione e le successive: il modo di scrivere i numeri.
A questo fine è utile rivedere il concetto di numero esposto nel capitolo 2.
Abbiamo definito i numeri naturali come la caratteristica comune agli insiemi di ciascuna classe di equivalenza.
Tra questi insiemi ne viene scelto uno che li rappresenti;

generalmente esso è un insieme di aste, le quali stilizzano le dita delle mani.

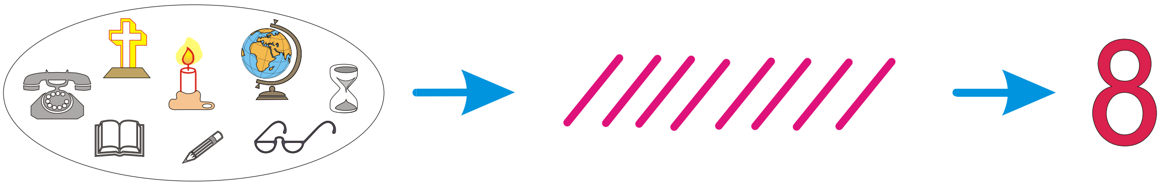


fig.3

Fintantoché un insieme è costituito da pochi elementi, rappresentare la loro quantità con altrettante aste è agevole; diventa più complesso quando il loro numero è elevato.
E' nata così la necessità di semplificarne la rappresentazione, utilizzando dei simboli particolari.

Il problema di scrivere i numeri naturali in modo conciso è stato affrontato nel corso dei secoli con l'invenzione di vari sistemi di numerazione e in particolare del nostro sistema decimale-posizionale.
Di questo sistema di numerazione ci siamo occupati ampiamente nella seconda unità didattica; nella presente unità affronteremo invece il problema di scrivere nel modo più conciso possibile lunghe stringhe di numeri, segni e cifre.
La nostra scrittura in cifre è un modo semplificato di rappresentare i numeri naturali: pochi simboli stanno al posto di molte unità grafiche.

Seguendo questa considerazione diamo la seguente

Definizione

La rappresentazione simbolica in cifre di un numero naturale è una semplificazione del primo ordine.

Con le semplificazioni del primo ordine si passa dal disegno schematico, rappresentativo della realtà, al simbolismo concettuale astratto. Si veda la figura 3, della pagina precedente.

Un'uguaglianza, in cui al primo membro c'è un'addizione con addendi tutti uguali ad uno, coincide con questo tipo di semplificazione. Si veda la figura 4 seguente.
Il simbolo 1 che si ripete rappresenta ogni singolo elemento dell'insieme in considerazione e il segno + determina il loro conteggio.

$$1+1+1+1+1+1+1+1 = 8$$

Semplificazione del 1° ordine

fig.4

L'operazione di addizione, con addendi non tutti uguali ad uno, determina un'ulteriore semplificazione delle semplificazioni del primo ordine.

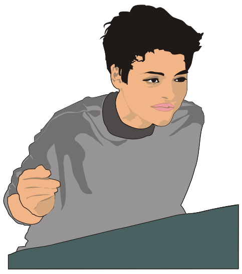
Questo tipo di addizione si può ricondurre al caso precedente scomponendo ciascun addendo nella somma di tante unità quante ne indica ciascun addendo.
Così, ad esempio, si avrà:

$$5+6+9=(1+1+1+1+1)+(1+1+1+1+1+1)+(1+1+1+1+1+1+1+1+1)=20$$

$$5+7=(1+1+1+1+1)+(1+1+1+1+1+1+1)=12$$

Semplificazione del 2° ordine

fig.5



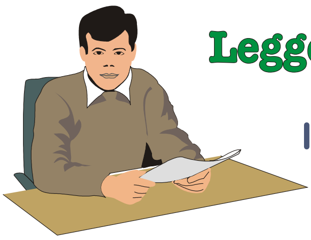
Definizione

L'operazione di addizione con gli addendi non tutti uguali ad 1 è una semplificazione del secondo ordine.

4.3 Proprietà dell'addizione

Esercizio 2
Stabilite se l'operazione di addizione tra due numeri naturali qualsiasi è sempre possibile.

Si rifletta sul concetto di addizione espresso nel paragrafo 4.1 e sul modo di ottenerne la somma utilizzando la semiretta dei naturali.
Poiché questa è illimitata a destra, sarà possibile muoversi su essa a destra di quante unità si vogliano.
Pertanto, ponendosi nel punto di origine e spostandosi a destra di tante unità quante ne indicano gli addendi, il punto di arrivo sarà contraddistinto ancora da un numero naturale.
Si concluderà così che l'operazione di addizione è sempre possibile nell'insieme N e che la somma di due qualsiasi numeri naturali è ancora un numero naturale. Questa proprietà sarà espressa dal seguente enunciato.



Legge di composizione interna dell'insieme N

l'operazione di addizione è interna all'insieme N

Questa legge è valida in generale, quindi, nel rispetto della regola stabilita nel paragrafo 4.1, la possiamo rappresentare con l'uso delle lettere, così come è mostrato nella figura 6.

$$a+b=c, \quad \text{se} \quad a;b \in N \Rightarrow c \in N$$

L'addizione è interna all'insieme N

fig.6

Leggi il riquadro della fig.6 così:
Data l'addizione a+b=c, se gli addendi a;b appartengono all'insieme N dei numeri naturali, ne seguirà che anche la loro somma c apparterrà all'insieme N.
(Per il simbolo di conseguenza logica ⇒ si veda il paragrafo 1.2).

Esercizio 3
Verificate la seguente uguaglianza: 7+5=5+7

Eseguendo l'addizione a primo membro si otterrà 12.
Allo stesso risultato si arriverà eseguendo l'addizione a secondo membro.
Ricordando il concetto insiemistico di addizione si potrà stabilire che questa uguaglianza è valida per qualsiasi coppia di numeri naturali.
Infatti il conteggio degli elementi dell'insieme unione non cambia al mutare dell'ordine degli insiemi di partenza: $a \cup b = b \cup a$
Questa proprietà dell'addizione sarà espressa dal seguente enunciato.

Proprietà commutativa dell'addizione

Commutando gli addendi la somma non cambia.

Poiché l'uguaglianza dell'esercizio 3 è valida per qualunque coppia di numeri, sostituendo in essa le lettere, esprimeremo la proprietà commutativa in forma generale. Si veda la figura 7 seguente.

$a+b = b+a$

Proprietà commutativa dell'addizione

fig.7

Esercizio 4
Verificate la seguente uguaglianza: (3+4)+8=3+(4+8)

Osservando l'uguaglianza si noterà che gli addendi a primo membro sono uguali a quelli a secondo membro, si noteranno anche dei simboli nuovi: le parentesi.

(è la parentesi tonda aperta;
) è la parentesi tonda chiusa.

Queste parentesi racchiudono le addizioni che si devono eseguire per prime.

Per stabilire se l'uguaglianza è vera o falsa si eseguano i calcoli in entrambi i membri.

$$(3+4)+8 = 3+(4+8)$$
$$7+8 = 3+12$$
$$15 = 15$$

l'uguaglianza è vera

Uguaglianze come questa si verificano sempre, per qualunque terna di numeri naturali, perché il conteggio totale delle unità non dipende dall'ordine degli addendi.

Questa proprietà sarà espressa dal seguente enunciato.

Proprietà associativa dell'addizione

Nelle addizioni il risultato finale non cambia se a due qualsiasi addendi si sostituisce la loro somma.

Mettendo le lettere al posto dei numeri nell'uguaglianza dell'esercizio 4, rappresenteremo la proprietà associativa dell'addizione in forma generale, così come è mostrato nella figura 8.

$$(a+b)+c = a+(b+c)$$

Proprietà associativa dell'addizione

fig.8

Esercizio 5
Eseguite i calcoli della seguente espressione.
23+49+40+21+17=

Le proprietà commutativa e associativa ci consentono di sommare gli addendi senza che sia necessario rispettare l'ordine con cui essi sono scritti.
Cosicché, per effettuare i calcoli più facilmente, si potranno associare gli addendi nel modo più opportuno.

$$23+49+30+21+17 = (23+17)+(49+21)+30 =$$
$$= 40+(70+30) = 40+100 = 140$$

4.4 I numeri 0 e 1 nell'addizione

Esercizio 6
Eseguite le seguenti addizioni.
12+0= ; 0+12= ; 0+0= ; a+0= ; 0+a= ;
2+1= ; 1+3= ; 1+1= ; 1+0= ; 0+1=

Lo zero rappresenta gli insiemi vuoti, cioè insiemi privi di elementi. (Si veda il paragrafo 1.2).
Pertanto, quando si esegue l'addizione spostandosi sulla

semiretta dei naturali, se un addendo è zero, non si deve effettuare alcun movimento.Cosicché lo zero non influisce sulla somma.
Questa caratteristica è espressa dal seguente

Enunciato

Lo zero è l'elemento neutro dell'addizione.

Ricorrendo ai simboli l'enunciato sarà rappresentato in forma generale, così come è mostrato nel riquadro della figura 9.

$$a+0=0+a=a$$

Lo 0 è l'elemento neutro dell'addizione

fig.9

Il numero 1 rappresenta ciascun elemento degli insiemi. Ad esso corrisponde lo spostamento a destra di una unità sulla semiretta dei naturali, determinando la successione dei numeri interi.

Eseguendo i calcoli dell'esercizio 6 si avranno i seguenti risultati.

12+0=0+12=12 ; 0+0=0 ; 1+0=0+1=1 ;
1+1=2 ; 2+1=3 ; 1+3=3+1=4

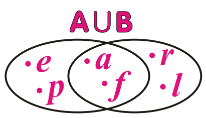

4C
OPERAZIONE
DI
ADDIZIONE
IN
N
Esercizi
e
Complementi

4.1C L'operazione di addizione in N

Esercizio 7
Carlo e Maria sono marito e moglie.
Carlo ha tre fratelli: Angelo, Sara e Carmela.
Maria ha quattro fratelli: Ciro, Beppe, Gino e Sandra.
Fate la rappresentazione grafica dei seguenti insiemi:
- l'insieme A dei fratelli di Carlo;
- l'insieme B dei fratelli di Maria;
- l'insieme C unione degli insiemi A e B.
Stabilite se è possibile calcolare la classe di equivalenza a cui appartiene l'insieme unione C eseguendo una operazione di addizione.

Esercizio 8
Giulio e Cesare sono cugini.
I nonni di Giulio sono: Anna, Franco, Elena, Pietro.
I nonni di Cesare sono: Anna, Franco, Rita, Luigi.
Fate la rappresentazione grafica dei seguenti insiemi:
- l'insieme A dei nonni di Giulio;
- l'insieme B dei nonni di Cesare;
- l'insieme C, unione degli insiemi A e B.
I due insiemi A e B sono disgiunti?
Si può calcolare a quale classe di equivalenza appartiene l'insieme C con una operazione di addizione?

$A = \{ a, f, e, p \}$
$B = \{ a, f, r, l \}$
$A \cup B = \{ a, f, e, p, r, l \}$



Nel paragrafo 4.1, nel definire l'operazione di addizione, si è precisato che gli insiemi rappresentati dagli addendi devono essere disgiunti.
Ciò risulta evidente nello svolgimento dell'esercizio 8.

Infatti, nel caso in cui si volessero addizionare i numeri che rappresentano gli insiemi A e B, i nonni di Giulio e di Cesare risulterebbero in tutto 8 anziché 6.
E' evidente allora che calcolare quanti elementi ha l'insieme unione di due insiemi non disgiunti è più complesso che eseguire una semplice addizione.

Esercizio 9
Dite come si chiamano i termini dell'addizione.
Spiegate il significato dei seguenti vocaboli:
addizione; somma; totale; più; addendo.

Esercizio 10
Rappresentate sulla semiretta dei numeri naturali le seguenti addizioni:
3+4=7 ; 9+12=21 ; 13+17=30 ; 5+1=6 ; 0+15=15

Esercizio 11
Eseguite le seguenti addizioni:
43+5+67+890 =
234+654+6+78+983 =
556709+456+76+3402+34783+304 =
432993+4546786+378679+7879071 =

Esercizio 12
Calcolate la somma dei primi trenta numeri della successione dei numeri naturali.

Esercizio 13
Scrivete tutti i numeri che si possono formare utilizzando contemporaneamente le cifre 2, 5, 7 senza ripeterle. Calcolate dopo la loro somma.

Esercizio 14
Verificate se le seguenti uguaglianze sono vere o false.
34+45+78 = 25+50+82
123+345+675 = 375+200+674
1230+456+6+709 = 234+789+785+593

Esercizio 15
Verificate le seguenti uguaglianze. Correggete poi quelle false, modificando uno degli addendi a primo membro.
78+34+56+89 = 72+44+65+76
676+43+112 = 600+70+40+100
467+1243+5067+56+8 = 3056+407+3003+376
82+59+123+503 = 90+73+100+552
345+4567+7837+45 = 4556+3789+628
543+701+887+413 = 542+700+886+412

4.2C Semplificazioni del 1° e del 2° ordine

Esercizio 16
Esprimete a parole vostre il concetto di numero naturale.

Esercizio 17
Dite che cosa si intende per classi di equivalenza degli insiemi.

Esercizio 18
Osservate la figura 3 del paragrafo 4.2 e spiegate cosa rappresenta.

Esercizio 19
Rappresentate con delle aste la classe di equivalenza a cui appartiene l'insieme degli alunni della vostra classe.

Esercizio 20
Spiegate cos'è un sistema di numerazione e quale necessità ne ha determinato l'invenzione.
Perché la nostra numerazione si dice decimale?

Esercizio 21
Dite che cosa si intende per semplificazione del primo ordine e cosa per semplificazione del secondo ordine.

Esercizio 22
Scomponete nella somma di unità i numeri 3 - 7 - 13 - 27
e gli addendi dell'addizione 5+6

Esercizio 23
Scrivete i risultati delle seguenti addizioni e dite quali di esse rappresentano delle semplificazioni del primo ordine e quali quelle del secondo ordine.

1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1=
34+45+3+12+4=
13+2+1+23+45=
1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1=
1+2+3+4+5+6+7+8+9=

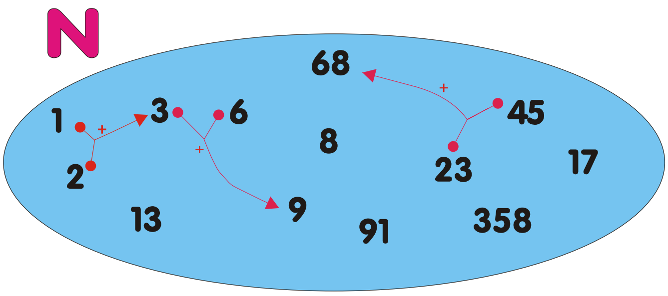
4.3C Proprietà dell'addizione

Esercizio 24
Dite cosa significa che la semiretta dei numeri naturali è illimitata a destra.

Esercizio 25
Dite cosa significa che l'operazione di addizione è interna all'insieme N.

Per esprimere che l'addizione è una operazione interna all'insieme N si può ricorrere all'enunciato e alla figura che seguono.

L'insieme N è chiuso rispetto all'operazione di addizione.



Legge di composizione interna di N

Il grafico mostra che la somma di due numeri naturali si trova all'interno dell'insieme N.

Esercizio 26
Osservate la figura 6 del paragrafo 4.3 e rispondete alle seguenti domande:
- Come si chiama il simbolo $\in$? ; cosa rappresenta?
- Come si chiama il simbolo $\Rightarrow$? ; cosa rappresenta?
- Cosa rappresentano le lettere a,b,c dell'uguaglianza?
- Leggete la seguente espressione:

  se $a,b \in N$ e se $c \notin N \Rightarrow a+b \neq c$

Esercizio 27
Ripetete a parole vostre la proprietà commutativa della operazione di addizione.

Esercizio 28
Senza eseguire i calcoli dite quali delle seguenti uguaglianze sono vere e quali false.

32+54=54+32 ; a+b=b+a
100+323=323+200 ; a+c=b+c

Esercizio 29
Ripetete a parole vostre la proprietà associativa della operazione di addizione.

Esercizio 30
Rispettando l'ordine indicato dalle parentesi tonde verificate se le seguenti uguaglianze sono vere.

(34+45)+67=34+(45+67)
123+(67+76)+490=231+(37+78+55+355)
947+(45+78+8)+(69+675)=(998+528)+543+(87+8)

Esercizio 31
Senza eseguire i calcoli dite quali delle seguenti uguaglianze sono vere e quali quelle false.

(3+4)+8=3+(4+8)
56+(787+321)=(56+787)+321
3+4+5+6+7=3+4+5+6+7
79+56+67+10=79+56+67+100
7+88+(56+778+43)=(7+88+56)+778+43
a+b+c=a+b+c
a+(b+c)=(a+b)+c
a+n+m=a+b+s
a+(c+n+b)=(a+b)+(c+n)

Proprietà dissociativa dell'addizione.

La proprietà dissociativa è l'inversa di quella associativa; essa ha il seguente enunciato:
la somma finale non cambia se si scompongono uno o più addendi in una addizione di altri addendi.

Esempio:

$$37+68+25=\underline{30+7}+\underline{60+8}+\underline{20+5}=$$
$$=(30+60+20)+(7+8+5)=110+20=130$$

Le proprietà associativa e dissociativa sono molto utili per eseguire le addizioni mentalmente.

Esercizio 32

Eseguite mentalmente i calcoli delle seguenti espressioni associando o dissociando opportunamente gli addendi.

12+45+55+8= ; 37+70+123=

125+700+75+77+300+13= ; 405+41+64+200=

91+250+9+450+370+30+700= ; 738+602+1004+3056=

Le parentesi

Abbiamo già visto cosa sono le parentesi tonde e a cosa servono, adesso vedremo altri due tipi di parentesi:

le parentesi quadre: [ ]

le parentesi graffe: { }

Quando in una espressione ci sono parentesi di tipo differente, esse sono disposte nel seguente ordine:
all'interno ci sono le parentesi tonde, all'esterno le parentesi graffe e tra di esse quelle quadre.

{ [( )] }

Lo svolgimento delle espressioni deve avvenire rispettando la seguente regola:

si eseguono prima le operazioni racchiuse dalle parentesi tonde, dopo quelle racchiuse dalle parentesi quadre e infine quelle racchiuse dalle parentesi graffe.

Esempio:

$$34+\{23+67+[45+712+(456+42)+63]+72\}+100=$$
$$=34+\{23+67+[45+712+498+63]+72\}+100=$$
$$=34+\{23+67+1318+72\}+100=$$
$$=34+1480+100=$$
$$=1614$$

Esercizio 33
Eseguite i calcoli delle seguenti espressioni seguendo l'ordine dato dalle parentesi.

a) $45+\{321+[32+(565+78+98+3)+908]+54+23\}+21=$
b) $56+\{[(455+654+65)+43+32]+294\}=$
c) $\{674+[889+400+(546+908)]+76+873+43\}+73+423=$

4.4C I numeri 0 e 1 nell'addizione

Esercizio 34
Cosa sono gli insiemi vuoti? Come si rappresenta la loro classe di equivalenza in cifre?
Qual è l'elemento neutro dell'addizione? Quanto influisce nella somma.

Esercizio 35
Ogni numero naturale è scomponibile nella somma di unità?
Di quante unità differisce ciascun numero naturale dal precedente? E di quante dal successivo?
Scomponete i numeri 6 e 9 nella somma di unità.

Esercizio 36
Eseguite i calcoli delle seguenti espressioni:

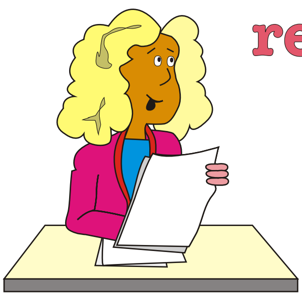
a) $(7+1)+(7+0)+(0+1)=$
b) $\{[(34+56+0)+45+1]+32+0\}+1+0=$
c) $1+0+\{1+1+0+[1+(0+1+1+0+0)+1+0]+1+0\}+1=$

5. Operazione di moltiplicazione

5.1 L'operazione di moltiplicazione in N

Esercizio 1
Eseguite i calcoli della seguente addizione.
7+7+7+7+7+7+7+7+7+7+7+7+7=

Addizionare tante volte di seguito il sette è un lavoro che potrebbe non essere piacevole.
Se poi gli addendi sono molti di più, ad esempio 100, il lavoro diventa faticoso e noioso.
Si pensi anche che si dovrebbe scrivere 100 volte di seguito 7+ .
Per evitare di scrivere molte volte lo stesso addendo si stabilisce la seguente



regola

Se gli addendi sono uguali, l'operazione di addizione si deve semplificare:
- **l'addendo che si ripete si scrive una sola volta, facendolo precedere dal numero che indica quante volte esso si ripete;**
- **tra i due numeri si mette un punto, per indicare l'operazione di semplificazione effettuata.**

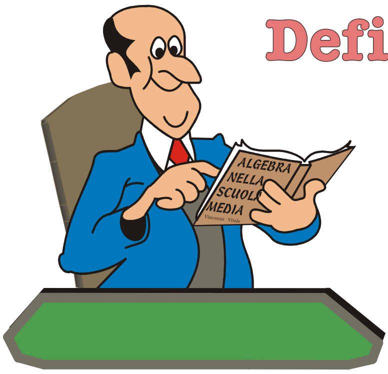
Seguendo la regola stabilita, l'addizione dell'esercizio 1 si scriverà in forma semplificata:

$$7+7+7+7+7+7+7+7+7+7+7+7+7=13\cdot 7$$

Esercizio 2
Semplificate la seguente espressione:
$12+12+12+12+12+12+12+12+12+12+12+12+12+12$

Poiché gli addendi sono uguali, dovendosi rispettare la regola stabilita, si avrà:

$$12+12+12+12+12+12+12+12+12+12+12+12+12+12 = 14\cdot 12$$



Definizioni

- L'operazione che semplifica l'addizione, quando gli addendi sono uguali, si dice **moltiplicazione**;
- i numeri della moltiplicazione si dicono **fattori**;
- il risultato della moltiplicazione si dice **prodotto**.

Per ottenere il prodotto di due numeri naturali si può procedere nel seguente modo:
Costruita una tavola pitagorica, si scorrano il rigo indicato dal primo fattore e la colonna indicata dal secondo fattore; il numero che si trova all'incrocio della colonna con il rigo è il prodotto dei due numeri.
Quindi, per eseguire la moltiplicazione al secondo membro dell'uguaglianza scritta sopra, si deve incrociare la riga 14 con la colonna 12 della tavola pitagorica del paragrafo 3.1C. Si otterrà così: $14\cdot 12 = 168$
Per ottenere il risultato della moltiplicazione dell'esercizio 1, si deve invece scorrere la riga 11 e la colonna 7. Si otterrà così: $13\cdot 7 = 91$

Per le moltiplicazioni più complesse si può ricorrere al già noto algoritmo della moltiplicazione oppure all'uso di una calcolatrice.

$$a \cdot b = c \qquad a;b;c \in N$$

MOLTIPLICAZIONE IN N

fig.1

Si osservi la figura 1.
L'uguaglianza rappresenta l'operazione di moltiplicazione perché a primo membro c'è il punto.
Di conseguenza le lettere a e b rappresentano due fattori e la lettera c il loro prodotto.
Inoltre il simbolo di appartenenza $\in$ indica che le lettere a,b,c rappresentano dei numeri naturali.

Il prodotto C si dice multiplo di ciascuno dei due fattori a,b.

5.2 Semplificazioni del 3° e del 4° ordine

Esercizio 3
Semplificate la seguente espressione letterale.
$a+a+a+a+a+a+a+a+a$

Poiché le lettere a sono legate tra loro dal segno + dell'addizione, esse sono degli addendi tutti uguali.
Rispettando la regola stabilita nel paragrafo precedente, si avrà la semplificazione della figura 2.

$$a+a+a+a+a+a+a+a+a = 9 \cdot a$$

SEMPLIFICAZIONE DEL 3° ORDINE

fig.2

Definizione

La semplificazione dell'addizione, quando gli addendi sono uguali si dice del terzo ordine.

(La regola di semplificazione è quella stabilita nel paragrafo precedente).

Esercizio 4
Semplificate la seguente espressione.
$3 \cdot 4 + 5 \cdot 4 + 7 \cdot 4$

Per prima cosa ci dobbiamo chiedere in che modo ciò sia possibile.
Si invita all'osservazione e alla riflessione.
L'espressione è formata da tre addendi e ciascun addendo da due fattori, con il secondo fattore uguale in tutti e tre.
Per quanto si è detto precedentemente, ciascun addendo rappresenta una semplificazione del terzo ordine.
Scomponendo ognuno di essi in addendi uguali e poi, ricomponendoli tutti in un'unica moltiplicazione, si avrà quanto è richiesto dall'esercizio.

$$3 \cdot 4 + 5 \cdot 4 + 7 \cdot 4 = (4+4+4)+(4+4+4+4+4)+(4+4+4+4+4+4+4) = 15 \cdot 4$$

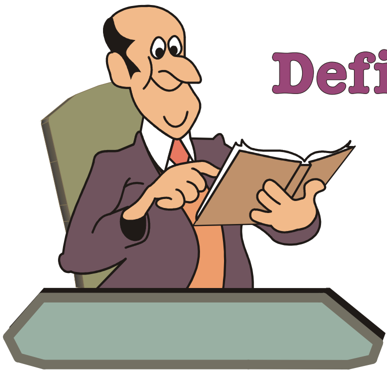
Esercizio 5
Semplificate la seguente espressione letterale.
$3 \cdot a + 4 \cdot a$

Procedendo come si è fatto con l'esercizio precedente si avrà il risultato seguente.

$$3 \cdot a + 4 \cdot a = (a+a+a)+(a+a+a+a) = 7 \cdot a$$

Con l'uso delle lettere questo tipo di semplificazione appare in forma generale, mostrando in modo evidente le sue caratteristiche:

- **il secondo fattore è uguale in ciascun addendo;**
- **la somma dei primi fattori di ciascun addendo determina una semplificazione.**



Definizioni

La semplificazione di più semplificazioni del terzo ordine si dice del quarto ordine.

$$3 \cdot a + 4 \cdot a = (a+a+a) + (a+a+a+a) = 7 \cdot a$$

SEMPLIFICAZIONE DEL 4° ORDINE

fig.3

5.3 Proprietà della moltiplicazione

Esercizio 6
Rivedete le proprietà dell'addizione e stabilite se esse sono valide anche per l'operazione di moltiplicazione.

Cominciamo ad esaminare la legge di composizione interna e chiediamoci se moltiplicando due qualsiasi numeri naturali il prodotto sarà ancora un numero naturale.

Ricordando la definizione data nel paragrafo 5.1, si stabilirà che ad ogni moltiplicazione si può sostituire una addizione con addendi tutti uguali.
Poiché la somma di numeri naturali è ancora un numero naturale, ne seguirà che anche il prodotto di due qualsiasi numeri naturali è un numero naturale.

Si concluderà così che l'operazione di moltiplicazione, essendo una addizione particolare, è una legge di composizione interna dell'insieme N.

Esercizio 6.1
Rivedete la legge di composizione interna relativa alla operazione di addizione, enunciata nel paragrafo 4.3, e apportate le modifiche per enunciare quella corrispondente della moltiplicazione.

Per fare ciò, basterà sostituire al vocabolo addizione il vocabolo moltiplicazione. Si otterrà in questo modo il seguente enunciato.

Legge di composizione interna dell'insieme N

L'operazione di moltiplicazione è interna all'insieme N.

Esercizio 6.2
Tenendo conto delle analogie con l'addizione, rivedete l'implicazione logica della figura 6, paragrafo 4.3, e apportate le modifiche per ottenere quella corrispondente all'operazione di moltiplicazione.

Basterà sostituire al segno + il segno $\cdot$ e al vocabolo addizione il vocabolo moltiplicazione, si otterrà così il riquadro della figura 4 seguente.

$$a \cdot b = c \quad ; \quad \text{se} \quad a, b \in N \quad \Rightarrow \quad c \in N$$

LA MOLTIPLICAZIONE E' INTERNA ALL'INSIEME N

fig.4

Verificata questa prima proprietà, stabiliamo adesso se la proprietà commutativa, valida per l'addizione, è anche valida per la moltiplicazione.
A questo fine si svolga l'esercizio seguente.

Esercizio 6.3
Considerate l'uguaglianza dell'esercizio 3, paragrafo 4.3, e stabilite se si verifica ancora, sostituendo all'addizione l'operazione di moltiplicazione.

Sostituendo al segno + il segno • , l'uguaglianza diventa:

$$7 \cdot 5 = 5 \cdot 7$$
$$35 = 35$$

Eseguendo i calcoli si constaterà che essa è vera.

Si osserverà anche che i due membri dell'uguaglianza hanno di diverso solo l'ordine dei fattori.

Per stabilire se questa uguaglianza si verifica per una qualsiasi altra coppia di numeri naturali, è sufficiente controllare la tavola pitagorica.
Si stabilirà così che questa è simmetrica, rispetto alla sua diagonale principale, proprio per la proprietà commutativa della moltiplicazione.

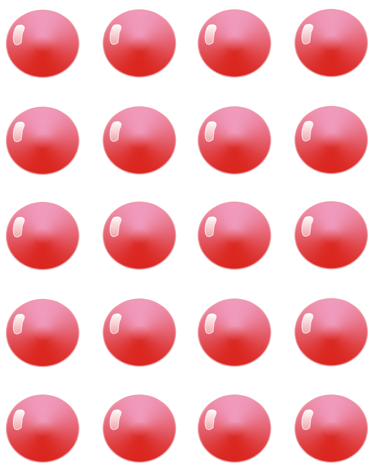


fig.5

Per contare le biglie della figura accanto si può procedere nei due modi seguenti:
a) si contano quelle di una riga e si moltiplica il loro numero per il numero di quelle di ciascuna colonna:

$$4 \cdot 5 = 20$$

b) si contano quelle di una colonna e si moltiplica il loro numero per il numero di quelle di ciascuna riga:

$$5 \cdot 4 = 20$$

Anche da questo esempio si può dedurre la proprietà commutativa della moltiplicazione.
Infatti appare evidente che il conteggio delle biglie darà lo stesso risultato anche se si inverte l'ordine dei fattori.

$$4 \cdot 5 = 5 \cdot 4 = 20$$

Esercizio 6.4
Enunciate la proprietà commutativa della moltiplicazione e scrivetela in forma generale.

Tenendo conto delle analogie con la corrispondente proprietà dell'addizione, si può eseguire l'esercizio modificando opportunamente l'enunciato e la figura 7 del paragrafo 4.3.

Proprietà commutativa della moltiplicazione

Commutando i fattori il prodotto non cambia.

$$a \cdot b = b \cdot a$$

PROPRIETÀ COMMUTATIVA DELLA MOLTIPLICAZIONE

fig.6

Resta da stabilire se la proprietà associativa, valida per l'addizione, è valida anche per la moltiplicazione.

Esercizio 6.5
Considerate l'uguaglianza dell'esercizio 4, paragrafo 4.3, e stabilite se si verifica ancora, sostituendo all'operazione di addizione quella di moltiplicazione.

Sostituendo al segno + il segno • , l'uguaglianza assumerà la forma seguente.

$$(3 \cdot 4) \cdot 8 = 3 \cdot (4 \cdot 8)$$
$$12 \cdot 8 = 3 \cdot 32$$
$$96 = 96$$

Eseguiti i calcoli, si constaterà essa è vera.

Uguaglianze di questo tipo si verificano sempre, per qualunque altra terna di numeri naturali, perché il conteggio finale degli oggetti, rappresentati dai fattori, non dipende dall'ordine con cui questi sono scritti.

Si può quindi affermare che la proprietà associativa è valida anche per l'operazione di moltiplicazione.

Esercizio 6.6
Considerando le analogie con l'operazione di addizione, enunciate la proprietà associativa della moltiplicazione e scrivetela in forma generale.

Si può eseguire l'esercizio modificando opportunamente l'enunciato e la figura 8 del paragrafo 4.3.

Proprietà associativa della moltiplicazione

Nelle moltiplicazioni il risultato finale non cambia se a due o più fattori si sostituisce il loro prodotto.

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Proprietà associativa della moltiplicazione

fig.7

Esercizio 6.7
Eseguite i calcoli della seguente espressione.
$5 \cdot 9 \cdot 25 \cdot 20 \cdot 4$

Le proprietà commutativa e associativa della moltiplicazione ci consentono di moltiplicare i fattori senza rispettare l'ordine con cui sono scritti.
Cosicché, per effettuare i calcoli più facilmente, i fattori si possono associare nel modo più opportuno.

$$5 \cdot 9 \cdot 25 \cdot 20 \cdot 4 =$$
$$= (25 \cdot 4) \cdot (5 \cdot 20) \cdot 9 =$$
$$= 100 \cdot 100 \cdot 9 =$$
$$= 90000$$

5.4 I numeri 0 e 1 nella moltiplicazione

Esercizio 7
Eseguite i calcoli delle seguenti moltiplicazioni.

a) $7\cdot1=$; $5\cdot0=$; $a\cdot1=$; $a\cdot0=$
b) $1\cdot7=$; $0\cdot5=$; $1\cdot a=$; $0\cdot a=$
c) $1\cdot1=$; $1\cdot0=$; $0\cdot1=$; $0\cdot0=$

Per eseguire i calcoli dell'esercizio a) dobbiamo tenere conto della definizione di moltiplicazione e della regola di semplificazione espresse nel paragrafo 5.1.

Si avranno così i seguenti risultati:

a) $7\cdot1=1+1+1+1+1+1+1=7$; $a\cdot1=1+1+1+1+...=a$
$5\cdot0=0+0+0+0+0=0$; $a\cdot0=0+0+0+0+...=0$

Per ottenere i risultati degli esercizi b) e c), ci dobbiamo chiedere prima qual è il significato delle moltiplicazioni che hanno come primo fattore 1 oppure 0.

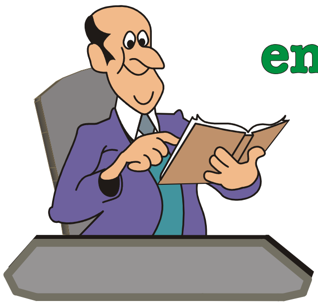
Estendendo anche a queste moltiplicazioni il concetto di semplificazione, stabiliamo per convenzione che:
- il primo fattore 1 indica che il secondo fattore si deve considerare una sola volta;
- il primo fattore 0 indica che il secondo fattore si deve considerare 0 volte.

Si osservi che queste interpretazioni ci consentono di applicare la proprietà commutativa della moltiplicazione anche quando i fattori sono 0 e 1.

b) $1\cdot7=7\cdot1=7$; $1\cdot a=a\cdot1=a$; $0\cdot5=5\cdot0=0$; $0\cdot a=a\cdot0=0$
c) $1\cdot1=1$; $1\cdot0=0\cdot1=0$; $0\cdot0=0$

Eseguito l'esercizio 7, riguardo alla moltiplicazione, si può stabilire che:
- il fattore 0 annulla il prodotto;
- il fattore 1 non influisce sul prodotto.

Queste proprietà sono espresse dai seguenti enunciati.



enunciato

Lo zero è l'elemento di annullamento del prodotto.

Passando ai simboli si avrà l'uguaglianza della fig.8.

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$$

ELEMENTO DI ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO

fig.8

enunciato

Il numero 1 è l'elemento neutro della moltiplicazione.

Passando ai simboli si avrà l'uguaglianza della fig.9.

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a$$

ELEMENTO NEUTRO DELLA MOLTIPLICAZIONE

fig.9

Anche in questo caso è opportuno considerare le analogie e le differenze tra l'addizione e la moltiplicazione.
I numeri 0 e 1 sono dei casi particolari per entrambe le operazioni e meritano attenzione.

5.5 Espressioni numeriche e letterali

Esercizio 8
Eseguite i calcoli della seguente espressione.

$4+5\cdot7=$

Eseguendo prima l'addizione e dopo la moltiplicazione, si avrà:

a) $(4+5)\cdot7=9\cdot7=63$

Viceversa, eseguendo prima la moltiplicazione e dopo la addizione, si avrà:

b) $4+5\cdot7=4+35=39$

Poiché si sono ottenuti risultati differenti, è necessario stabilire quale delle due operazioni si deve eseguire per prima.

Se si vuole che l'addizione abbia la precedenza sulla moltiplicazione, essa si deve racchiudere con i suoi addendi dentro le parentesi tonde, così come è stato fatto nello svolgimento a).

In caso contrario si dovrà rispettare la seguente

regola

Se in una espressione ci sono addizioni e moltiplicazioni si devono eseguire per prime le moltiplicazioni.

Applicando questa regola all'espressione dell'esercizio 8 si avrà lo svolgimento b).

Esercizio 9
Eseguite i calcoli della seguente espressione.

$4\cdot6+8\cdot12+12\cdot25+35\cdot45$

In questa espressione non ci sono parentesi.
Pertanto, rispettando la regola stabilita, si devono eseguire per prime le moltiplicazioni.

$$4\cdot6+8\cdot12+12\cdot25+35\cdot45=$$
$$=24+96+300+1575=$$
$$=1995$$

Esercizio 10
Eseguite i calcoli della seguente espressione.
$(4+6)\cdot23+[10+12\cdot(4+3\cdot6)]=$

Le parentesi ci indicano quali operazioni si devono eseguire per prime.
Cominciamo con le operazioni racchiuse dalle parentesi tonde, dopo con quelle racchiuse dalle parentesi quadre e concludiamo infine con le rimanenti.

$$(4+6)\cdot23+[10+12\cdot(4+3\cdot6)]=$$
$$=10\cdot23+[10+12\cdot(4+18)]=$$
$$=10\cdot23+[10+12\cdot22]=$$
$$=230+[10+264]=$$
$$=230+274=$$
$$=504$$

Esercizio 11
Semplificate la seguente espressione.
$5+5+5+5+5+5+6+6+6+6+6+6+6+6+9+9+9$

Gli addendi non sono tutti uguali ma si possono eseguire delle semplificazioni parziali del 3° ordine, applicando la proprietà associativa.

$$(5+5+5+5+5+5)+(6+6+6+6+6+6+6+6)+(9+9+9)=$$
$$=6\cdot5+8\cdot6+3\cdot9$$

Esercizio 12
Eseguite le semplificazioni delle seguenti espressioni.
a) $4+4+5+6+4+5+6+5+6+4+6+4+5+5+6+6+5+5+6+6$
b) $a+a+b+c+a+b+c+b+c+a+a+b+b+c+c+b+b+c$

Le proprietà commutativa e associativa dell'addizione con-

sentono di mettere assieme gli addendi nel modo più appropriato, cosicché si avrà:

a) $(4+4+4+4+4)+(5+5+5+5+5+5+5)+(6+6+6+6+6+6+6+6)=$
$=5\cdot4+7\cdot5+8\cdot6$

b) $(a+a+a+a+a)+(b+b+b+b+b+b+b)+(c+c+c+c+c+c)=$
$=5\cdot a+7\cdot b+6\cdot c$

Esercizio 13
Eseguite le semplificazioni delle seguenti espressioni:
a) $3\cdot9+4\cdot7+8\cdot9+6\cdot7$
b) $4\cdot a+8\cdot b+12\cdot a+7\cdot b$

Si possono eseguire delle semplificazioni del 4° ordine parziali, associando gli addendi in modo appropriato.

a) $(3\cdot9+8\cdot9)+(4\cdot7+6\cdot7)=$
$=11\cdot9+10\cdot7$

b) $(4\cdot a+12\cdot a)+(8\cdot b+7\cdot b)=$
$=16\cdot a+15\cdot b$

In caso di difficoltà si scompongano le moltiplicazioni in addizioni.

Esercizio 14
semplificate le seguenti espressioni.
a) $6\cdot7+7\cdot13$
b) $4\cdot8+4\cdot7+9\cdot15$

a)
$6\cdot7+7\cdot13=$
$=6\cdot7+13\cdot7=$
$=19\cdot7$

Applicando la proprietà commutativa alla moltiplicazione è possibile eseguire poi una semplificazione del 4° ordine.

b)
$4\cdot8+4\cdot7+9\cdot15=$
$=(8\cdot4+7\cdot4)+9\cdot15=$
$=15\cdot4+9\cdot15=$
$=4\cdot15+9\cdot15=$
$=13\cdot15$

Applicando più volte la proprietà commutativa della moltiplicazione è possibile eseguire delle semplificazioni del 4° ordine.

5C

OPERAZIONE DI MOLTIPLICAZIONE IN N

Esercizi e Complementi

5.1C L'operazione di moltiplicazione in N

Esercizio 15
Dite qual è la definizione di moltiplicazione.

Esercizio 16
Dite come si chiamano i termini della moltiplicazione.

Esercizio 17
Osservate la figura 1 del paragrafo 5.1.
Cosa rappresenta l'uguaglianza?
Quali sono i simboli presenti?
Cosa rappresentano le lettere a,b,c ?

Esercizio 18
Completate la tavola pitagorica del paragrafo 3.1C, riempiendo le caselle vuote.
Successivamente calcolate il prodotto delle seguenti moltiplicazioni, incrociando le righe con le colonne.
7•9= ; 11•8= ; 14•12= ; 15•16

Esercizio 19
Contate quante caselle ci sono nella tavola pitagorica del paragrafo 3.1C.
Quale operazione si deve eseguire per ottenere il risultato nel modo più rapido?
In quale casella è scritto il risultato cercato?

Esercizio 20
Eseguite le seguenti moltiplicazioni mediante l'algoritmo appreso nelle scuole elementari.
Successivamente controllate l'esattezza dei calcoli con l'uso di una calcolatrice.

a) 23•37= ; 7132•956= ; 56456•6879= ;
b) 32•4001= ; 9020•435= ; 30450•70600= ;
c) 1001•3010= ; 7654•5555= ; 87675•5432= ;
d) 21•121= ; 398•897= ; 65782•5672= ;
e) 201•55= ; 4553•3421= ; 45632•6783=

Esercizio 21
Eseguite le moltiplicazioni, ricordando che, per ottenere il loro prodotto, non sono necessari né l'algoritmo né la calcolatrice.

34•10= ; 57•100= ; 1000•3456= ; 100•100 ;
76•10.000= ; 100.000•453= ; 87•1.000.000=

Il prodotto di un qualsiasi numero naturale per 10, 100, 1000, ..., si ottiene aggiungendo al primo fattore tanti zeri quanti ce ne sono nel secondo fattore.

5.2C Semplificazioni del 3° e del 4° ordine

Esercizio 22
Applicate la regola del paragrafo 5.1 alle seguenti espressioni numeriche.

3+3+3+3+3+3+3+3+3=
7+7+7+7+7+7+7+7+7+7+7+7+7+7=
41+41+41+41+41+41+41+41+41+41+41+41+41=

Quale operazione si ottiene con queste semplificazioni?

Esercizio 23
Applicate la regola del paragrafo 5.1 alle seguenti espressioni letterali.

a+a+a+a+a+a+a+a=
b+b+b+b+b+b+b+b+b+b+b+b=
x+x+x+x+x+x+x+x+x+x+x=

Quale operazione si ottiene con queste semplificazioni?

Esercizio 24
Scomponete le seguenti semplificazioni del 3° ordine nella somma di addendi uguali.

3•6= ; 7•a= ; 11•4= ; 6•b ;
5•18= ; 6•x= ; 3•13= ; 7•y

Esercizio 25

Scomponete le seguenti espressioni nella somma di addendi uguali.

$4 \cdot 3+2 \cdot 3=$; $3 \cdot b+6 \cdot b=$

$2 \cdot 6+3 \cdot 6+5 \cdot 6=$; $4 \cdot c+5 \cdot c+3 \cdot c+c=$

Esercizio 26

Eseguite le semplificazioni del 4° ordine.

$8 \cdot 6+7 \cdot 6=$; $7 \cdot a+12 \cdot a=$;

$3 \cdot 11+5 \cdot 11+11=$; $6 \cdot c+5 \cdot c+2 \cdot c+c=$;

$5 \cdot 9+6 \cdot 9+2 \cdot 9+9=$; $7 \cdot x+8 \cdot x+x+3 \cdot x=$

Esercizio 27

Dite quali tipi di semplificazioni si sono studiate finora. Enunciate le loro definizioni.

Di che ordine sono le seguenti semplificazioni?

$1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1=11$; $12+32+5+67=116$;

$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3=10 \cdot 3$; $12 \cdot 31+18 \cdot 31=30 \cdot 31$

5.3C Proprietà della moltiplicazione

Esercizio 28

Dite se le proprietà dell'addizione studiate sono valide anche per la moltiplicazione.

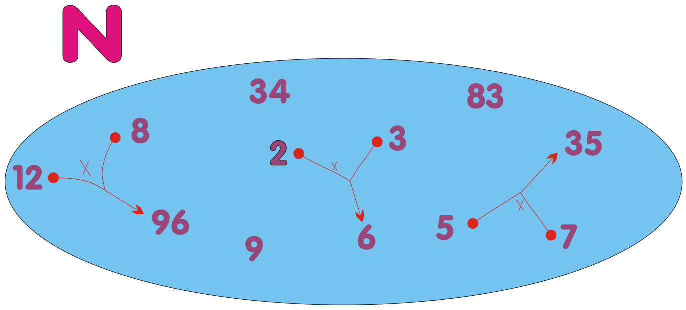
Enunciatele prima con l'operazione di addizione e dopo con l'operazione di moltiplicazione.

Esercizio 29

Spiegate cosa significa dire che l'operazione di addizione è interna all'insieme N.

Per esprimere che la moltiplicazione è una operazione interna all'insieme N si può ricorrere all'enunciato e alla figura che seguono.

L'insieme N è chiuso rispetto all'operazione di moltiplicazione.



Legge di composizione interna di N

Il grafico mostra che il prodotto di due numeri naturali si trova all'interno dell'insieme N.

Esercizio 30
Osservate la figura 4 del paragrafo 5.3 e rispondete alle seguenti domande.
- Come si chiama il simbolo $\in$? ; cosa rappresenta?
- Come si chiama il simbolo $\Rightarrow$? ; cosa rappresenta?
- Cosa rappresentano le lettere a,b,c ?
- Leggete le seguenti relazioni:
  se $a,b \in N$ e se $c \notin N \Rightarrow a+b \neq c$

Esercizio 31
Ripetete a parole vostre la proprietà commutativa della operazione di moltiplicazione.

Esercizio 32
Senza eseguire i calcoli dite quali delle uguaglianze seguenti sono vere e quali false.

$82 \cdot 53 = 53 \cdot 82$; $a \cdot b = b \cdot a$
$300 \cdot 27 = 300 \cdot 200$; $a \cdot c = b \cdot c$

Esercizio 33
Ripetete a parole vostre la proprietà associativa della operazione di moltiplicazione.

Esercizio 34
Rispettando l'ordine indicato dalle parentesi tonde verificate se le seguenti uguaglianze sono vere.

$(43 \cdot 45) \cdot 86 = 43 \cdot (45 \cdot 86)$

$24 \cdot (71 \cdot 16) \cdot 13 = (24 \cdot 71) \cdot (16 \cdot 13)$

$5 \cdot (13 \cdot 12 \cdot 8) \cdot (6 \cdot 75) = (5 \cdot 1248) \cdot 10 \cdot (75 \cdot 8)$

Esercizio 35
Senza eseguire i calcoli dite quali delle seguenti espressioni sono vere e quali quelle false.

$(3 \cdot 4) \cdot 8 = 3 \cdot (4 \cdot 8)$; $a \cdot b \cdot c = a \cdot b \cdot c$

$56 \cdot (787 \cdot 321) = (787 \cdot 56) \cdot 321$; $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

$3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 4 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6$; $a \cdot n \cdot m = a \cdot b \cdot n$

$79 \cdot 56 \cdot 67 \cdot 10 = 56 \cdot 100 \cdot 79 \cdot 67$; $a \cdot (c \cdot n \cdot b) = (a \cdot b) \cdot (c \cdot n)$

$7 \cdot 88 \cdot (56 \cdot 78 \cdot 43) = (7 \cdot 88 \cdot 56) \cdot (78 \cdot 43)$; $x \cdot y \cdot z \cdot m \cdot n = (z \cdot x) \cdot (y \cdot m)$

Esercizio 36
Eseguite i calcoli delle seguenti espressioni.

$12 \cdot 25 \cdot 5 \cdot 4 =$

$20 \cdot 13 \cdot 8 \cdot 300 \cdot 5 \cdot 25 =$

$250 \cdot 15 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 =$

5.4C I numeri 0 e 1 nella moltiplicazione

Esercizio 37
Eseguite le seguenti moltiplicazioni.

$13 \cdot 1 =$; $34 \cdot 0 =$; $1 \cdot 34 =$; $0 \cdot 62 =$;
$1 \cdot 1 =$; $1 \cdot 0 =$; $0 \cdot 0 =$; $0 \cdot 1 =$;
$12 \cdot 1 \cdot 34 \cdot 0 \cdot 7 =$; $a \cdot 1 =$; $0 \cdot b =$; $1 \cdot c =$;
$c \cdot 0 \cdot 87 =$; $a \cdot 1 \cdot 0 =$; $a \cdot 0 \cdot b \cdot c \cdot 1 =$

Esercizio 38
Dite quali caratteristiche assumono i numeri zero e uno rispetto all'operazione di moltiplicazione.

Esercizio 39
Qual è l'elemento neutro della moltiplicazione?
E quale quello dell'addizione?
Che ruolo assume lo zero per la moltiplicazione?

5.5C Espressioni numeriche e letterali

Esercizio 40
Eseguite i calcoli delle seguenti espressioni.
$12 \cdot 45 \cdot 368=$
$10 \cdot 13 \cdot 34 \cdot 1000=$
$43750 \cdot 324 \cdot 32 \cdot 27=$

Esercizio 41
Eseguite i calcoli delle seguenti espressioni.
a) $34 \cdot 45+12 \cdot 7+56 \cdot 37=$
b) $5+50 \cdot 20+12 \cdot 13+32=$
c) $(5+50) \cdot 20+12 \cdot (13+32)=$

Esercizio 42
Eseguite i calcoli delle seguenti espressioni.
a) $(4+12 \cdot 45)+(50 \cdot 76+98)=$
b) $34+62+(77+71 \cdot 35 \cdot 2+83 \cdot 3)+77=$ [5469]
c) $[(42+10 \cdot 5+5 \cdot 7)+(69+43 \cdot 12)]+17 \cdot 4=$ [780]

Esercizio 43
Eseguite i calcoli delle seguenti espressioni.
a) $[34+25 \cdot (12+45 \cdot 67) \cdot 3+445]+32 \cdot (23+123)=$ [232176]
b) $74+\{[(34+3 \cdot 10) \cdot 2+(17+23) \cdot 3]+45+54\}+66=$ [487]
c) $\{87+22 \cdot [61+78 \cdot 4 \cdot (33+93)+10 \cdot (85+15)]+18\}+34=$ [888.345]

Esercizio 44
Semplificate le seguenti espressioni numeriche.
a) $4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4=$
b) $5+5+5+5+5+5+8+8+8+8+8+8+8+8+8+8+8=$
c) $12+12+12+12+12+51+51+51+51+73+73+73+73+73+73=$

Esercizio 45
Semplificate le seguenti espressioni letterali.
a) $a+a+a+a+a+a+a+a+a=$
b) $a+a+a+a+a+a+b+b+b+b+b+b=$
c) $m+m+m+m+m+c+c+c+c+c+c+x+x+x+x+x+x+x+x+x=$

Esercizio 46

Semplificate le seguenti espressioni numeriche.

a) $6+5+6+5+5+5+6+6+5+6=$

b) $11+9+9+11+11+5+5+5+11+9+9+11+5+5=$

c) $2+7+2+7+7+2+4+4+4+2+2+7+7+4+2+2+7+4+7+4+4=$

Esercizio 47

Semplificate le seguenti espressioni letterali.

a) $a+b+b+a+b+a+b+b+a+a+a+b=$

b) $a+c+c+a+b+c+b+b+c+a+a+c+b+c+b=$

c) $x+y+x+x+y+y+z+z+z+x+y+y+y+x+x+z=$

Esercizio 48

Semplificate le seguenti espressioni numeriche.

a) $3\cdot7+5\cdot7=$

b) $8\cdot11+6\cdot11+5\cdot9+7\cdot9+9=$

c) $9\cdot13+7\cdot13+13+6\cdot10+6\cdot10+10+3\cdot4+5\cdot4+9\cdot4=$

Esercizio 49

Semplificate le seguenti espressioni letterali.

a) $5\cdot a+7\cdot a=$

b) $4\cdot c+3\cdot c+c+6\cdot b+b+5\cdot b=$

c) $3\cdot x+6\cdot x+x+7\cdot z+z+8\cdot y+7\cdot y+y=$

Esercizio 50

Semplificate le seguenti espressioni numeriche.

a) $3\cdot21+4\cdot53+7\cdot21+8\cdot53+10\cdot21=$

b) $11\cdot13+21\cdot45+22\cdot13+19\cdot45+23\cdot45+10\cdot13=$

Esercizio 51

Semplificate le seguenti espressioni letterali.

a) $20\cdot a+31\cdot b+13\cdot a+21\cdot b+a+8\cdot a+b=$

b) $7\cdot x+11\cdot y+5\cdot x+13\cdot x+5\cdot y+x+y=$

Esercizio 52

Semplificate le seguenti espressioni numeriche.

a) $9\cdot6+5\cdot9=$

b) $4\cdot5+5\cdot7+4\cdot11=$

c) $3\cdot8+8\cdot7+10\cdot5+13\cdot6=$

Esercizio 53

Semplificate le seguenti espressioni numeriche.

a) $8+8+8+8+9\cdot 8=$

b) $5+5+5+5+6\cdot 5+3\cdot 4+4+4+4+4=$

c) $6+5\cdot 6+6+6+6+4\cdot 9+9+9+9+6+3\cdot 9+9=$

Esercizio 54

Semplificate le seguenti espressioni numeriche.

a) $8+8+8+8+8\cdot 9=$

b) $5+5+5+5+4+4+4+4+4=$

c) $6+5+5+6+6+5+9+9+9+5+5+9+5+6=$

Esercizio 55

Semplificate le seguenti espressioni letterali.

a) $a+a+3\cdot a+a+5\cdot a=$

b) $x+y+y+x+x+3\cdot y+6\cdot x+x+y=$

c) $4\cdot z+3\cdot m+z+z+m+2\cdot m+m+z+5\cdot z=$

Esercizio 56

Semplificate le seguenti espressioni letterali.

a) $a+a+a+a+a\cdot 3+b+b+b+b+b\cdot 5$

b) $5\cdot a+a\cdot 6+a+7\cdot c+c+c+c+c+c\cdot 8=$

c) $a+a+b+b\cdot 5+c+3\cdot b+4\cdot a+c\cdot 2+7\cdot c=$

d) $x+x+4\cdot x+y\cdot 3+x\cdot 5+x+y+y+x+x\cdot 7+y\cdot 8=$

Esercizio 57

Semplificate le seguenti espressioni.

a) $2+3+a+b+2\cdot a+3\cdot b+2+2\cdot 7+3+a+5\cdot b+3\cdot 6+2=$

b) $4\cdot 9+5\cdot c+9\cdot 13+7\cdot 8+c\cdot 11+12\cdot 7+c+9=$

c) $32+x+y+12\cdot 32+3\cdot x+5\cdot y+x+32\cdot 9+44\cdot 22=$

6. Operazione di elevazione a potenza

6.1 L'operazione di elevazione a potenza in N

Esercizio 1
Calcolate il prodotto della seguente moltiplicazione.
$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 =$

Facendo un confronto con le lezioni e gli esercizi del capitolo 5, si potranno esaminare le analogie e le differenze tra le operazioni di moltiplicazione e di elevazione a potenza.

Svolgendo l'esercizio 1 proposto, si potrà constatare che moltiplicare tante volte di seguito il sette è un lavoro faticoso e lungo.
Se poi i fattori dovessero essere molti di più, ad esempio 100, il lavoro diventerebbe davvero impossibile.
Si pensi anche che si dovrebbe scrivere 100 volte di seguito 7• .

Per evitare di scrivere molte volte lo stesso fattore si stabilisce la seguente regola.

REGOLA

Se i fattori sono uguali, l'operazione di moltiplicazione si deve semplificare: il fattore che si ripete si scrive una sola volta, facendolo seguire da un numeretto, posto in alto, che indica quante volte si ripete.

Esercizio 2
Semplificate la seguente espressione.
11•11•11•11•11•11

Poiché i fattori sono uguali, applicando la regola appena stabilita, si avrà:

$$11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 = 11^6$$

DEFINIZIONI

- L'operazione che semplifica la moltiplicazione, quando i fattori sono uguali, si dice **elevazione a potenza**.
- In ogni elevazione a potenza, il primo numero si dice **base**;
- il secondo numero, scritto più piccolo in alto, si dice **esponente**;
- il risultato, ottenuto dai calcoli, si dice **potenza**.

Cosicché, la semplificazione 11^6, ottenuta dall'esercizio 2, è una operazione di elevazione a potenza; l'esponente 6 indica quante volte si ripete la base 11 come fattore nella moltiplicazione semplificata.
Eseguendo i calcoli degli esercizi 1 e 2 si avrà:

$7^{12} = 13.841.287.201$ $\qquad$ $11^6 = 1.771.561$

1.771.561 è la potenza sesta di undici

7^{12} ESPONENTE = **13.841.287.201**

BASE $\qquad$ POTENZA DODICESIMA DI SETTE

$$a^n = b \qquad a;b;n \in N$$

ELEVAZIONE A POTENZA IN N

fig.1

Nel riquadro della figura 1 l'uguaglianza rappresenta l'operazione di elevazione a potenza in N.
La lettera a è la base, la lettera n è l'esponente, la lettera b è la potenza ennesima di a.
Essa si legge così: << a elevato ad n è uguale b >>
oppure: << a all'ennesima è uguale b >>.

Per leggere qualsiasi elevazione a potenza si segue la stessa procedura.
Cosicché:

7^{12} si legge: << sette elevato a dodici >>
oppure: << sette alla dodicesima >>

12^6 si legge: << dodici elevato a sei >>
oppure: << dodici alla sesta >>

Per gli esponenti 2 e 3 si usa anche la seguente terminologia: "... al quadrato" ; "... al cubo".
Cosicché:

9^2 si legge: << nove elevato a due >>
oppure : << nove alla seconda >>
o anche: << nove al quadrato >>

11^3 si legge: << undici elevato a tre >>
oppure: << undici alla terza >>
o anche: << undici al cubo >>

Nella tavola pitagorica di pag.66 si possono leggere i quadrati dei primi numeri naturali.
Essi costituiscono la sua diagonale principale.

Esercizio 3
Eseguite i calcoli delle seguenti elevazioni a potenza:

8^4 ; 15^3 ; 31^2 ; 9^5 ; 10^6

Per calcolare la potenza di una elevazione a potenza si deve moltiplicare la base per sé stessa, tante volte di seguito quante ne indica l'esponente.
Quando l'esponente è un numero alto si può ricorrere all'uso di una calcolatrice che abbia la funzione esponenziale.

$8^4=8\cdot8\cdot8\cdot8=4.096$; $15^3=15\cdot15\cdot15=3.375$;
$31^2=31\cdot31=961$; $9^5=9\cdot9\cdot9\cdot9\cdot9=59.049$;
$10^6=10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10=1.000.000$

Poiché facilmente le elevazioni a potenza danno come risultato numeri molto grandi, spesso si preferisce non eseguire i calcoli e lasciare la scrittura in forma esponenziale.
In questo caso l'elevazione a potenza è chiamata semplicemente potenza, per indicare il numero da essa rappresentato.

6.2 Semplificazioni del 5° e del 6° ordine

Esercizio 4
Semplificate la seguente espressione.

$a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a$

Poiché le lettere a sono legate tra loro dal segno di moltiplicazione, esse rappresentano dei fattori, tutti uguali.
Rispettando la regola stabilita nel paragrafo 6.1, si avrà il risultato della figura 2 seguente.

$$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^9$$

SEMPLIFICAZIONE DEL 5° ORDINE

fig.2

DEFINIZIONE

La semplificazione della moltiplicazione si dice del quinto ordine.

Le regole di semplificazione sono quelle del paragrafo 6.1 precedente.

Esercizio 5
Semplificate la seguente espressione numerica.
$3^4 \cdot 3^7 \cdot 3^5$

E' utile riuscire a cogliere le analogie con quanto è stato proposto nell'esercizio 4 del paragrafo 5.2.

Nell'espressione dell'esercizio proposto adesso, i tre fattori sono costituiti da tre elevazioni a potenza che hanno la stessa base.
Scomponendo ciascuna di queste nella moltiplicazione di fattori uguali e ricomponendoli poi tutti in una soltanto, si avrà:

$$3^4 \cdot 3^7 \cdot 3^5 = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = 3^{16}$$

Esercizio 6
Semplificate l'espressione letterale:
$a^3 \cdot a^4$

Procedendo come è stato fatto con l'esercizio precedente,

si avrà il seguente risultato:

$$a^3 \cdot a^4 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a \cdot a) = a^7$$

Con l'uso delle lettere, questo tipo di semplificazione appare in forma generale, mostrando in modo evidente le sue caratteristiche:

- la base è uguale in ciascun fattore;
- la somma degli esponenti di ciascun fattore, determina la semplificazione voluta.

DEFINIZIONE

La semplificazione di più semplificazioni del quinto ordine si dice del sesto ordine.

$$a^3 \cdot a^4 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a \cdot a) = a^7$$

SEMPLIFICAZIONE DEL 6° ORDINE

fig.3

6.3 Potenza di una potenza

Esercizio 7

Semplificate la seguente espressione numerica.

$3^4 \cdot 3^4 \cdot 3^4 \cdot 3^4 \cdot 3^4$

Si rifletta bene sull'espressione data:

- essa è formata da 5 fattori uguali;
- i fattori sono potenze con la stessa base.

In considerazione di queste osservazioni, la semplificazione richiesta può effettuarsi in due modi diversi.

a) Primo modo:

Poiché i fattori sono uguali, si può eseguire una semplificazione del 5° ordine:
si scrive un fattore soltanto e si eleva a potenza.

$$3^4 \cdot 3^4 \cdot 3^4 \cdot 3^4 \cdot 3^4 = (3^4)^5$$

L'espressione a secondo membro, ottenuta dalla semplificazione del primo membro, si dice potenza di una potenza.

Le parentesi sono necessarie per staccare la prima elevazione a potenza dalla successiva.
Per eseguire i calcoli si deve rispettare l'ordine dato dalle parentesi.
Si calcola prima la potenza racchiusa dalle parentesi e dopo quella esterna.

$$(3^4)^5 = 81^5 = 3.486.784.401$$

prima quella interna

Si osservi che, scomponendo ciascuna elevazione a potenza in fattori uguali e ricomponendoli poi in una soltanto, si avrà:

$$(3^4)^5 = \quad (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)^5 =$$

$$= \quad (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (33 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = 3^{20}$$

b) Secondo modo:

Poiché i fattori sono potenze che hanno la stessa base, si può eseguire una semplificazione del 6° ordine.
All'espressione si può sostituire una potenza che ha per base la stessa base di ciascuna potenza e per esponente la somma dei loro esponenti.

$$3^4 \cdot 3^4 \cdot 3^4 \cdot 3^4 \cdot 3^4 = 3^{4+4+4+4+4} = 3^{5 \cdot 4}$$

Gli addendi sono uguali, per cui si può eseguire una semplificazione del 3° ordine ad esponente.

Eseguendo i calcoli si avrà:

$$3^{5 \cdot 4} = 3^{20} = 3.486.784.401$$

Anche se si sono eseguite le semplificazioni in due modi differenti, avendo operato correttamente in entrambi i casi, alla fine si è ottenuto lo stesso risultato.
Pertanto si concluderà che le due scritture seguenti sono equivalenti.

$(3^4)^5 = 3^{4 \cdot 5}$ entrambe danno per risultato 3^{20}

In forma generale questa proprietà sarà rappresentata dall'uguaglianza della figura 4 e avrà il seguente

ENUNCIATO

La potenza di una potenza è uguale alla potenza che ha per base la stessa base e per esponente il prodotto degli esponenti.

$$(a^b)^c = a^{b \cdot c}$$

Potenza di una potenza

fig. 4

Il processo di elevazione a potenza può essere ripetuto illimitatamente; l'uguaglianza della figura 4 rimarrà sempre valida.

Un esempio è dato dalla seguente espressione:

$$(((((3^7)^4)^5)^2)^6)^9 = 3^{7 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 9}$$

Tra tutte le elevazioni successive a potenza che si possono formare, sono di notevole interesse quelle che hanno gli esponenti tutti uguali, così come si verifica nel seguente esempio.

$$((((3^4)^4)^4)^4)^4 = 3^{4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4}$$

Esercizio 8
Semplificate l'esponente della potenza a secondo membro dell'uguaglianza scritta qui sopra.

L'esponente del secondo membro è formato da fattori uguali:

$$4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4$$

Si può allora effettuare una semplificazione del 5° ordine:

$$4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4=4^5$$

Pertanto l'uguaglianza in considerazione sarà semplificata nel modo seguente:

$$((((3^4)^4)^4)^4)^4 = 3^{4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4} = 3^{4^5}$$

Cosicché alla fine si è ottenuta una potenza di potenza.
Ma in questa non vanno messe le parentesi, perché è differente da quella del riquadro della figura 4.

Per maggiore chiarezza allora è preferibile darle un nome diverso dalla precedente: diciamo che questa è una potenza con potenza ad esponente e la scriveremo in forma generale così come è mostrato nel riquadro della figura 5 seguente.

Per eseguire i calcoli si procederà nel modo seguente.
Si calcola prima la potenza più esterna e successivamente la potenza che avrà come esponente il risultato ottenuto.

$$3^{4^5} = 3^{1024} = \ldots$$

prima quella esterna

Attenzione!
Per potere scrivere il numero naturale rappresentato dal-

la potenza 3^{1024} occorre una striscia di carta lunga 5 metri.
Infatti esso è formato da circa 500 cifre.

$$a^{m^n}=b$$

POTENZA con POTENZA ad ESPONENTE

fig.5

6.4 Le proprietà dell'elevazione a potenza

Esercizio 9
Rivedete le proprietà della moltiplicazione e stabilite se esse sono valide anche per l'operazione di eleva- zione a potenza.

Cominciamo ad esaminare la legge di composizione interna e chiediamoci se, eseguendo i calcoli, la potenza di un qualsiasi numero naturale è ancora un numero naturale.

Ricordando la definizione di potenza data nel paragrafo 6.1, si può osservare che ad ogni elevazione a potenza si può sostituire una moltiplicazione con fattori tutti uguali.
Poiché, come si è già stabilito, il prodotto di numeri naturali è un numero naturale, ne conseguirà anche che la potenza di un numero naturale è un numero naturale.

Si concluderà così che l'operazione di potenza, essendo una moltiplicazione particolare, è una legge di composizione interna dell'insieme N.

Esercizio 9.1
Rivedete la legge di composizione interna relativa alla moltiplicazione, enunciata nel paragrafo 5.3, e apportate le dovute modifiche, per ottenere quella corrispondente dell'elevazione a potenza.

Basterà fare la seguente sostituzione:

moltiplicazione $\xrightarrow{\text{con}}$ *elevazione a potenza*

Si otterrà così il seguente enunciato.

Legge di composizione interna dell'insieme N

L'operazione di elevazione a potenza è interna all'insieme N.

Esercizio 9.2
Rivedete la figura 4 del paragrafo 5.3 e apportate le opportune modifiche, per ottenere quella corrispondente dell'elevazione a potenza.

Sostituendo al simbolo di moltiplicazione quello di elevazione a potenza, si avrà l'implicazione logica della figura 6 seguente.

$$a^b = c \quad ; \quad \text{se} \quad a \in N \Rightarrow c \in N$$

L'ELEVAZIONE A POTENZA E' INTERNA ALL'INSIEME N

fig.6

Nella figura 6 non si è specificato che $b \in N$, perché ciò risulta in modo evidente dalla definizione di elevazione a potenza.

Esercizio 9.3
Stabilite se per l'elevazione a potenza è valida la proprietà commutativa, facendo un confronto con le operazioni di moltiplicazione e di addizione.

Ricercando le analogie con quanto è stato detto a proposito della moltiplicazione e dell'addizione, sarà spontaneo fare una verifica con una uguaglianza.
Consideriamo, ad esempio, la seguente:

$$2^3=3^2$$

Eseguendo i calcoli a primo e a secondo membro, si avrà: $2^3=8$; $3^2=9$

L'uguaglianza non è vera, vale invece la disuguaglianza: $2^3 \neq 3^2$

Si dovrà concludere così che la proprietà commutativa, valida per le operazioni di addizione e di moltiplicazione, non vale per l'elevazione a potenza.

Esercizio 9.4
Considerando quanto si è detto nello svolgimento dello esercizio 9.3 precedente, modificate opportunamente il riquadro della figura 6, paragrafo 5.3, per ottenere quello relativo all'operazione di elevazione a potenza.

Quanto è stato constatato nello svolgimento dell'esercizio 9.3 precedente, sarà espresso dal seguente

ENUNCIATO

Commutando la base con l'esponente il valore della potenza cambia.

Sostituendo poi nel riquadro della figura 6, paragrafo 5.3, all'operazione di moltiplicazione l'elevazione a potenza e al simbolo di uguaglianza quello di disuguaglianza, si avrà il riquadro della figura 7 seguente.

$$a^b \neq b^a$$

NON C'è LA PROPRIETA' COMMUTATIVA

fig.7

Esercizio 9.5
Stabilite se per l'elevazione a potenza è valida la proprietà associativa, facendo un confronto con le operazioni di moltiplicazione e di addizione.

Ricercando le analogie con quanto è stato detto a proposito della moltiplicazione e dell'addizione, sarà spontaneo fare una verifica con una uguaglianza.
Consideriamo, ad esempio, questa:

$$(4^3)^2 = 4^{(3^2)}$$

Eseguendo i calcoli a primo e a secondo membro, si dovrà concludere che:

$$(4^3)^2 = 64^2 = 4.096$$
$$4^{(3^2)} = 4^9 = 262.144$$

l'uguaglianza non è vera, vale invece la disuguaglianza:

$$(4^3)^2 \neq 4^{(3^2)}$$

Cosicché la proprietà associativa, valida per le operazioni di addizione e di moltiplicazione, non vale per l'elevazione a potenza.

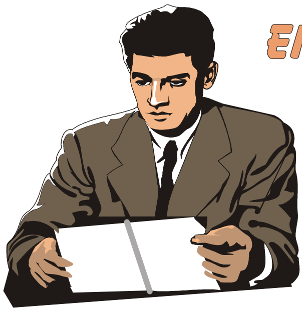
I risultati ottenuti confermano quanto avevamo stabilito nel paragrafo 6.3.
Le due potenze:

$(4^3)^2$ (potenza di potenza)

4^{3^2} (potenza con potenza ad esponente)

sono di tipo differente, quindi c'era da aspettarsi che i calcoli avrebbero dato risultati disuguali.

Quanto è stato constatato sarà espresso dalla disuguaglianza della figura 8 e dal seguente



ENUNCIATO

L'operazione di elevazione a potenza non ha la proprietà associativa.

$$(a^m)^n \neq a^{m^n}$$

NON C'è LA PROPRIETA' ASSOCIATIVA

fig.8

6.5 I numeri 0 e 1 nell'elevazione a potenza

Esercizio 10
Eseguite i calcoli delle seguenti elevazioni a potenza.

$0^7 =$; $0^a =$; $1^8 =$; $1^a =$

Tenendo conto della definizione data nel paragrafo 6.1, ciascuna elevazione a potenza dell'esercizio proposto si può scomporre in una moltiplicazione di fattori uguali.

Pertanto, si avranno i seguenti risultati:

$0^7 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$ $\qquad$ $0^a = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \ldots = 0$

$1^8 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ $\qquad$ $1^a = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \ldots = 1$

Rimane però il problema di stabilire quali risultati si ottengono delle seguenti elevazioni a potenza:

7^0 ; a^0 ; 8^1 ; a^1 ; 1^0 ; 0^1 ; 0^0

Infatti queste non si possono trasformare nel prodotto di fattori e per giunta non è nemmeno valida la proprietà commutativa.

$7^0 \neq 0^7$	$\Rightarrow$	$7^0 \neq 0$
$a^0 \neq 0^a$	$\Rightarrow$	$a^0 \neq 0$
$8^1 \neq 1^8$	$\Rightarrow$	$8^1 \neq 1$
$a^1 \neq 1^a$	$\Rightarrow$	$a^1 \neq 1$
$1^0 \neq 0^1$	$\Rightarrow$	$1^0 \neq 0$
$0^1 \neq 1^0$	$\Rightarrow$	$0^1 \neq 1$

Momentaneamente si dovranno accettare i risultati dati in modo convenzionale dalle seguenti

DEFINIZIONI

- Qualunque elevazione a potenza con esponente 1, dà come risultato la base.
- Qualunque elevazione a potenza con esponente 0 e base diversa da zero, dà come risultato 1.

$$a^1 = a \qquad a \in N$$

fig.9

$$a^0 = 1 \qquad a \in N \;;\; a \neq 0$$

fig.10

Per le definizioni date, si hanno quindi questi risultati:

$7^0=1^0=a^0=1$; $8^1=8$; $a^1=a$; $0^1=0$

L'ultimo caso da considerare è la potenza 0^0.
Questa elevazione a potenza è stata esclusa dalle definizioni, perché ad essa non corrisponde alcuna potenza ben determinata.
Per adesso ci dobbiamo contentare di dire:

l'elevazione a potenza 0^0 non ha senso.

6.6 Ordine di grandezza di un numero

A cominciare dal capitolo 4, paragrafo 4.2, abbiamo affrontato il problema di scrivere i numeri naturali nel modo più conciso possibile.
In questo paragrafo il problema verrà risolto in modo definitivo.

Esercizio 11
Calcolate le potenze successive di dieci fino alla undicesima.

Eseguire i calcoli richiesti non è difficile, si osservi la tabella.

$10^0=1$	$10^4=10.000$	$10^8=100.000.000$
$10^1=10$	$10^5=100.000$	$10^9=1.000.000.000$
$10^2=100$	$10^6=1.000.000$	$10^{10}=10.000.000.000$
$10^3=1.000$	$10^7=10.000.000$	$10^{11}=100.000.000.000$

Dai calcoli effettuati si sarà notato che:

ogni potenza di dieci è formata dalla cifra 1 seguita da tanti zeri quante sono le unità indicate dall'esponente.

Esercizio 12
Scrivete in forma estesa il numero naturale 34.587.192.

(Si è già parlato delle forme estese nel paragrafo 3.3)
Il numero in considerazione è formato da:

2 unità del 1° ordine,	cioè:	$2 \cdot 1 = 2 \cdot 10^0$
9 unità del 2° ordine,	cioè:	$9 \cdot 10 = 9 \cdot 10^1$
1 unità del 3° ordine,	cioè:	$1 \cdot 100 = 1 \cdot 10^2$
7 unità del 4° ordine,	cioè:	$7 \cdot 1.000 = 7 \cdot 10^3$
8 unità del 5° ordine,	cioè:	$8 \cdot 10.000 = 8 \cdot 10^4$
5 unità del 6° ordine,	cioè:	$5 \cdot 100.000 = 5 \cdot 10^5$
4 unità del 7° ordine,	cioè:	$4 \cdot 1.000.000 = 4 \cdot 10^6$
3 unità del 8° ordine,	cioè:	$3 \cdot 10.000.000 = 3 \cdot 10^7$

La notazione esponenziale delle potenze di dieci ci dà una lettura immediata dell'ordine di ciascuna unità.
Cosicché, scriveremo:

$$34.587.192 = 3 \cdot 10^7 + 4 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5 + 8 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$$

FORMA POLINOMIALE

fig.11

DEFINIZIONI

- **La scrittura a secondo membro dell'uguaglianza della fig.11 si dice forma polinomiale del numero a primo membro.**
- **Si dice ordine di grandezza di un numero dato la potenza di dieci ad esso più vicina.**

Nelle forme polinomiali, l'ordine di grandezza del numero è dato dalla potenza di dieci con l'esponente più alto se il fattore accanto ad esso è inferiore a 5, altrimenti è la potenza di dieci successiva.

l'ordine di grandezza di 34.587.192 è 10^7
l'ordine di grandezza di 65.781.234 è 10^8

Infatti, 34.587.192 è più vicino a $10^7 = 10.000.000$
mentre 65.781.234 è più vicino a $10^8 = 100.000.000$

Quando un numero è molto alto la sua lettura non è immediata, per cui, quando è possibile, si preferisce ricorrere alle forme di scrittura esponenziali.

- **Se il numero è una potenza perfetta, si può scriverlo sotto forma di elevazione a potenza.**

  per esempio:

  al posto di 815.730.721, potenza ottava di 13, si può scrivere 13^8

- **Se il numero ha una lunga coda di zeri, si può scriverlo come prodotto di una potenza di dieci.**

  per esempio:

  al posto di 45.000.000.000 si può scrivere: $45 \cdot 10^9$

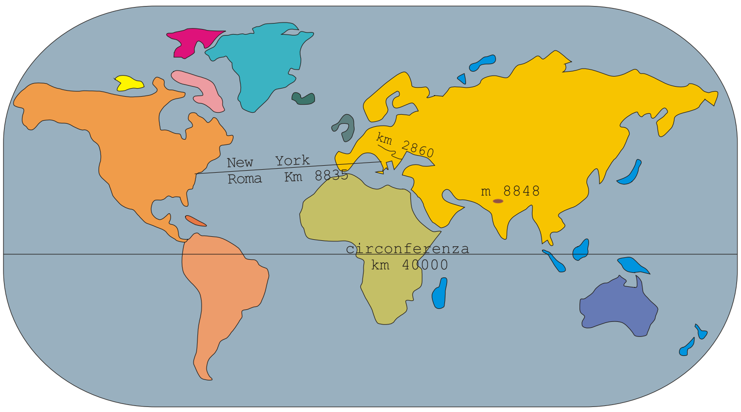
- **Se non è necessario conoscere il valore di un numero con la massima precisione, è sufficiente indicarne l'ordine di grandezza.**
  Per i numeri molto grandi ciò viene fatto spesso.

  per esempio:

  la distanza della terra dal sole è dell'ordine di grandezza di 10^8 Km.

  Infatti la sua distanza media è di Km 149.506.000

Ordine di grandezza di alcune misure geografiche:



Altezza monte Everest
Km 10

Circonferenza terra
Km 10^4

Distanza New York - Roma
Km 10^4

Lunghezza fiume Danubio
km 10^3

Ricorrendo all'ordine di grandezza è possibile rappresentare con pochi simboli numeri davvero enormi.

Esercizio 13
Stabilite qual è il numero naturale rappresento dalla seguente potenza:

$$10^{10^{10}}$$

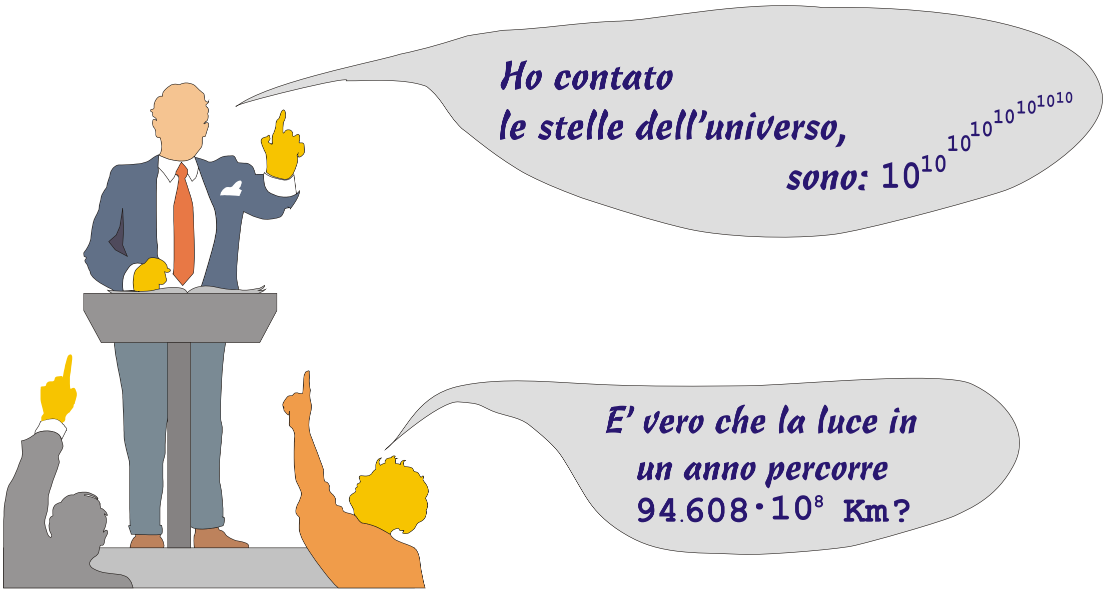
Questa è una potenza con potenza ad esponente, quindi, per eseguire i calcoli, si dovrà procedere iniziando dalla potenza più esterna.
Cosicché si otterrà prima la seguente potenza:

$$10^{10^{10}} = 10^{10.000.000.000}$$

Procedendo con quest'ultima potenza si otterrà un numero che dopo la cifra 1 ha una coda di

10 miliardi di zeri!

Per poterlo scrivere, usando caratteri della larghezza di 4 millimetri, occorrerebbe una striscia di carta lunga 40.000 chilometri, uguale quindi alla lunghezza della circonferenza della terra.



6.7 Espressioni numeriche e letterali

Esercizio 14

Eseguite i calcoli della seguente espressione.

$6+7\cdot 3^4$

Abbiamo già stabilito che la moltiplicazione ha la precedenza sull'addizione.
Adesso, essendo presente anche l'elevazione a potenza, stabiliamo il nuovo ordine da seguire; si calcolerà prima la potenza, dopo la moltiplicazione e infine l'addizione.

POTENZA → **MOLTIPLICAZIONE** → **ADDIZIONE**

L'espressione dell'esercizio proposto avrà quindi questo svolgimento:

$$6+7\cdot 3^4=6+7\cdot 81=6+567=573$$

Esercizio 15

Eseguite i calcoli della seguente espressioni.

$\{3\cdot[12+2^3\cdot(5^2+4^2\cdot 3)^2+7]+6^3+4\}+6^4=$

In questa espressione si dovrà tenere conto dell'ordine dato dalle parentesi, oltre a quello stabilito sopra.

$$\{3\cdot[12+2^3\cdot(5^2+4^2\cdot 3)^2+7]+6^3+4\}+6^4=$$
$$=\{3\cdot[12+8\cdot(25+16\cdot 3)^2+7]+216+4\}+1296=$$
$$=\{3\cdot[12+8\cdot 73^2+7]+216+4\}+1296=$$
$$=\{3\cdot[12+42632+7]+216+4\}+1296=$$
$$=\{3\cdot 42651+216+4\}+1296=$$
$$=128173+1296=$$
$$=129469$$

Esercizio 16
Semplificate la seguente espressione numerica.

$4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot8\cdot8\cdot8\cdot8\cdot8\cdot8\cdot13\cdot13=$

I fattori non sono tutti uguali, si possono però eseguire delle semplificazioni parziali del 5° ordine.

$(4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4)\cdot(8\cdot8\cdot8\cdot8\cdot8\cdot8)\cdot(13\cdot13) =$
$=4^5\cdot8^6\cdot13^2$

Esercizio 17
Semplificate le seguenti espressioni.

a) $5\cdot6\cdot6\cdot5\cdot9\cdot5\cdot5\cdot6\cdot9\cdot6\cdot5\cdot6\cdot5\cdot21\cdot5\cdot21=$
b) $a\cdot b\cdot a\cdot x\cdot x\cdot a\cdot b\cdot x\cdot b\cdot a\cdot b\cdot x\cdot b\cdot x\cdot x=$

Le proprietà commutativa e associativa della moltiplicazione consentono di mettere assieme i fattori nel modo più appropriato.

a) $(5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5)\cdot(6\cdot6\cdot6\cdot6\cdot6)\cdot(9\cdot9)\cdot(21\cdot21)=$
$=5^7\cdot6^5\cdot9^2\cdot21^2$

b) $(a\cdot a\cdot a\cdot a)\cdot(b\cdot b\cdot b\cdot b\cdot b)\cdot(x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x)=$
$=a^4\cdot b^5\cdot x^6$

Esercizio 18
Semplificate le seguenti espressioni.

a) $3^5\cdot3^7\cdot3^6\cdot3=$
b) $a^3\cdot a\cdot a^6\cdot a^2=$

Si possono eseguire delle semplificazioni del 6° ordine.

a) $3^5\cdot3^7\cdot3^6\cdot3=3^{19}$
b) $a^3\cdot a\cdot a^6\cdot a^2=a^{12}$

Nel caso in cui si dovessero avere difficoltà nel dedurre i risultati, si scompongano i singoli fattori nel prodotto di fattori e successivamente si ricompongano in una sola elevazione a potenza, così come è stato fatto nel paragrafo 6.2.

Esercizio 19
Semplificate le seguenti espressioni.

a) $3^4 \cdot 5^7 \cdot 3 \cdot 4^8 \cdot 5^9 \cdot 3^{12} \cdot 4^2 \cdot 5$

b) $a^2 \cdot b^4 \cdot a^3 \cdot b \cdot a \cdot x^5 \cdot x^7 \cdot b^8 \cdot x$

Associando i fattori in modo appropriato è possibile eseguire delle semplificazioni del 6° ordine.

a) $(3^4 \cdot 3 \cdot 3^{12}) \cdot (4^8 \cdot 4^2) \cdot (5^7 \cdot 5^9 \cdot 5) = 3^{17} \cdot 4^{10} \cdot 5^{17}$

b) $(a^2 \cdot a^3 \cdot a) \cdot (b^4 \cdot b \cdot b^8) \cdot (x^5 \cdot x^7 \cdot x) = a^6 \cdot b^{13} \cdot x^{13}$

Esercizio 20
Semplificate le seguenti espressioni.

a) $4+4+4+4+4+4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$

b) $a+a+b+b \cdot b \cdot b+a+a \cdot a+b+a+b$

In queste espressioni si possono eseguire contemporaneamente semplificazioni del 3° e del 5° ordine, associando tra loro gli addendi uguali e tra loro i fattori uguali.

a) $(4+4+4+4+4)+(4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4) = 5 \cdot 4+4^5$

b) $a+a+b+b \cdot b \cdot b+a+a \cdot a+b+a+b=$
$=(a+a+a+a)+(b+b+b)+(b \cdot b \cdot b)+(a \cdot a)=$
$=4 \cdot a+3 \cdot b+b^3+a^2$

Esercizio 21
Semplificate le seguenti espressioni.

a) $5 \cdot 5^2 \cdot 5+6^2 \cdot 6^4+6^3 \cdot 6^3+5^3 \cdot 5^4+5^3 \cdot 5$

b) $4^2 \cdot 4^7+4^9+4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4+4 \cdot 4^2 \cdot 4^3 \cdot 4^3$

c) $a \cdot a \cdot a \cdot a+a \cdot a^2 \cdot a+b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b+a^3 \cdot a+b \cdot b \cdot b^3+a^4+2 \cdot b^5$

In queste espressioni, dopo avere ottenuto le prime semplificazioni, successivamente è possibile eseguirne ancora delle altre.

a) $5 \cdot 5^2 \cdot 5+6^2 \cdot 6^4+6^3 \cdot 6^3+5^3 \cdot 5^4+5^3 \cdot 5=$
$= 5^4+6^6+6^6+5^8+5^4=$
$= 2 \cdot 5^4+2 \cdot 6^2+5^8$

b) $(4^2 \cdot 4^7)+4^9+(4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4)+(4\cdot4^2\cdot4^3\cdot4^3) =$

$= 4^9+4^9+4^9+4^9 =$

$= 4\cdot4^9 =$

$= 4^{10}$

gli addendi sono uguali e così si può eseguire una semplificazione del 3° ordine.

c) $(a\cdot a\cdot a\cdot a)+(a\cdot a^2\cdot a)+(b\cdot b\cdot b\cdot b\cdot b)+(a^3\cdot a)+(b\cdot b\cdot b^3)+a^4+2\cdot b^5 =$

$= a^4+a^4+b^5+a^4+b^5+a^4+2\cdot b^5 =$

$= (a^4+a^4+a^4+a^4)+(b^5+b^5+2\cdot b^5) =$

$= 4\cdot a^4+4\cdot b^5$

Si possono eseguire semplificazioni del 3° e del 4° ordine.

Esercizio 22
Semplificate le seguenti espressioni.

a) $3\cdot a+5\cdot b+c+7\cdot a+2\cdot c+3\cdot b+8\cdot a+5\cdot c$

b) $3\cdot a^5+7\cdot b^3+6\cdot a^5+b^3+a^5$

Si possono eseguire in entrambe le espressioni delle semplificazioni del 4° ordine.

a) $3\cdot a+5\cdot b+c+7\cdot a+2\cdot c+3\cdot b+8\cdot a+5\cdot c =$

$= (3\cdot a+7\cdot a+8\cdot a)+(5\cdot b+3\cdot b)+(c+2\cdot c+5\cdot c) =$

$= 18\cdot a+8\cdot b+8\cdot c$

b) $3\cdot a^5+7\cdot b^3+6\cdot a^5+b^3+a^5 =$

$= (3\cdot a^5+6\cdot a^5+a^5)+(7\cdot b^3+b^3) =$

$= 10\cdot a^5+8\cdot b^3$

Esercizio 23
Semplificate le seguenti espressioni.

a) $3+3+5+7+5+5+7+3+7+3+3+5+7+7+7$

b) $7+5+5+7+13+13+13+7+5+13+13+5+13+13+7+5+5+7+13$

In queste espressioni, dopo avere ottenuto le prime semplificazioni, è possibile eseguirne ancora delle altre.

a) $3+3+5+7+5+5+7+3+7+3+3+5+7+7+7 =$

$= (3+3+3+3+3)+(5+5+5+5)+(7+7+7+7+7+7) =$

$= 5\cdot3+4\cdot5+6\cdot7 =$

$= 3\cdot5+4\cdot5+6\cdot7 =$

$= 7\cdot5+6\cdot7 =$

$= 5\cdot7+6\cdot7 =$

$= 11\cdot7$

Applicando la proprietà commutativa della moltiplicazione si può semplificare diverse volte.

b) $7+5+5+7+13+13+13+7+5+13+13+5+13+13+7+5+5+7+13=$
$= 5\cdot7+6\cdot5+8\cdot13 =$
$= 7\cdot5+6\cdot5+8\cdot13 =$
$= 13\cdot5+8\cdot13 =$
$= 13\cdot13 =$
$= 13^2$

Esercizio 24
Semplificate le seguenti espressioni.
a) $5^7\cdot5^7\cdot5^7\cdot5^7\cdot5^7\cdot5^7$
b) $a^4\cdot a^4\cdot a^4\cdot a^4\cdot a^4$

E' possibile eseguire in entrambe le espressioni sia semplificazioni del 5° ordine sia del 6° ordine.

a) $5^7\cdot5^7\cdot5^7\cdot5^7\cdot5^7\cdot5^7=(5^7)^6$

- Considerando che i fattori sono uguali si è eseguita una semplificazione del 5° ordine, ottenendo come risultato una potenza di potenza.

$$5^7\cdot5^7\cdot5^7\cdot5^7\cdot5^7\cdot5^7=5^{7+7+7+7+7+7}=5^{6\cdot7}$$

- Considerando che i fattori sono potenze che hanno la stessa base si è eseguita una semplificazione del 6° ordine.

Resta così verificato che $(5^7)^6=5^{6\cdot7}=5^{42}$

b) $a^4\cdot a^4\cdot a^4\cdot a^4\cdot a^4=(a^4)^5=a^{5\cdot4}=a^{20}$

Esercizio 25
Semplificate la seguente espressione.
$a^{3\cdot8+5\cdot8}$

$a^{3\cdot8+5\cdot8} =$
$= a^{8\cdot8} =$
$= a^{8^2}$

Si effettuano delle semplificazioni ad esponente e alla fine si ottiene una potenza con potenza ad esponente.

6C

OPERAZIONE DI ELEVAZIONE A POTENZA IN N

Esercizi e Complementi

6.1C L'operazione di elevazione a potenza in N

Esercizio 26
Dite qual è la definizione di elevazione a potenza.

Esercizio 27
Dite come si chiamano i termini dell'elevazione a potenza.

Esercizio 28
Osservate la figura 1 del paragrafo 6.1
Cosa rappresenta l'uguaglianza?
Quali sono i simboli presenti?
Cosa rappresentano le lettere a,b,n?

Esercizio 29
Completate la tavola pitagorica del paragrafo 3.1C, riempiendo le caselle vuote della diagonale principale.
Successivamente calcolate le potenze delle seguenti elevazioni a potenza, prolungando in questo modo la diagonale della tavola.

$17^2 =$; $18^2 =$; $19^2 =$; $20^2 =$; $21^2 =$;
$22^2 =$; $23^2 =$; $24^2 =$; $25^2 =$; $26^2 =$

Esercizio 30
Contate quante caselle ci sono nella tavola pitagorica del paragrafo 3.1C.
Quale operazione si deve eseguire per ottenere il risultato?
In quale casella si può leggere il risultato cercato?

Esercizio 31
Eseguite i calcoli delle seguenti elevazioni a potenza.
Dopo controllate l'esattezza dei calcoli con l'uso di una calcolatrice.

$31^3 =$; $3^5 =$; $5^6 =$; $7^4 =$; $71^2 =$;
$17^3 =$; $6^5 =$; $39^2 =$; $9^4 =$; $41^2 =$.

6.2C Semplificazioni del 5° e del 6° ordine

Esercizio 32
Applicando la regola del paragrafo 6.1, semplificate le seguenti espressioni numeriche.

$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$

$41 \cdot 41 \cdot 41 \cdot 41 \cdot 41 \cdot 41 \cdot 41 \cdot 41 \cdot 41 \cdot 41 \cdot 41 \cdot 41 \cdot 41$

Quale operazione si ottiene con queste semplificazioni?

Esercizio 33
Applicando la regola del paragrafo 6.1, semplificate le seguenti espressioni letterali.

$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$

$b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b$

$x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$

Quale operazione si ottiene con queste semplificazioni?

Esercizio 34
Scomponete le seguenti semplificazioni del 5° ordine nel prodotto di fattori uguali.

$6^5=$; $31^7=$; $a^8=$; $c^{13}=$;
$2^9=$; $10^{12}=$; $x^6=$; $y^{10}=$

Esercizio 35
Scomponete le seguenti espressioni nel prodotto di fattori uguali.

$4^3 \cdot 4^5=$; $b^4 \cdot b^6=$; $x^3 \cdot x^6=$
$6^2 \cdot 6^4 \cdot 6^3=$; $c^4 \cdot c^3 \cdot c^2 \cdot c=$; $z^4 \cdot z^5=$

Esercizio 36
Eseguite le semplificazioni del 6° ordine.

a)
$6^8 \cdot 6^7=$
$11^3 \cdot 11^5 \cdot 11=$
$7^2 \cdot 7^3 \cdot 7 \cdot 6^4 \cdot 6^5=$
$3^4 \cdot 5^5 \cdot 3^6 \cdot 6^3 \cdot 6^7 \cdot 5 \cdot 3^9=$
$12^7 \cdot 31^{21} \cdot 12^{16} \cdot 31^{89}=$

b)
$a^7 \cdot a^{12}=$
$c^3 \cdot c^6 \cdot c^4 \cdot c^2 \cdot c=$
$x^4 \cdot x^8 \cdot x \cdot y^2 \cdot y^6 \cdot y^4=$
$y^3 \cdot x^4 \cdot z^6 \cdot y^{11} \cdot x^9 \cdot y^{13} \cdot z^8 \cdot y^5=$
$a^{11} \cdot b^{32} \cdot y^5 \cdot b^{43} \cdot y^{65} \cdot a^{22} \cdot y^4=$

Esercizio 37

Dite quali tipi di semplificazioni si sono studiate finora. Enunciate le loro definizioni.

Di che ordine sono le seguenti semplificazioni?

$1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1=13$; $21+43+15+76=155$;

$5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5=11\cdot 5$; $23\cdot 19+17\cdot 19=40\cdot 19$;

$71\cdot 71\cdot 71\cdot 71\cdot 71\cdot 71\cdot 71\cdot 71=71^8$; $8^3\cdot 8^4\cdot 8^5=8^{12}$

6.3C Potenza di una potenza

Esercizio 38

Eseguite prima una semplificazione del 5° ordine e dopo una del 6° ordine in ciascuna delle seguenti espressioni.

a) $11^5\cdot 11^5\cdot 11^5\cdot 11^5\cdot 11^5\cdot 11^5$

b) $c^6\cdot c^6\cdot c^6\cdot c^6\cdot c^6\cdot c^6\cdot c^6$

Esercizio 39

Calcolate la potenza delle seguenti elevazioni.

$(2^3)^4$; $(5^2)^3$; $(6^3)^3$; $(3^2)^5$; $(4^3)^2$

Esercizio 40

Verificate le seguenti uguaglianze.

$(2^4)^3=2^{4\cdot 3}$; $(10^3)^2=10^{3\cdot 2}$; $(5^2)^3=5^{2\cdot 3}$

Esercizio 41

Senza eseguire i calcoli dite se le seguenti uguaglianze sono vere o false.

$$\left(\left(\left(\left(\left(4^3\right)^4\right)^7\right)^2\right)^6\right)^5 = 4^{3\cdot 4\cdot 7\cdot 2\cdot 6\cdot 5} \qquad \left(\left(\left(\left(6^8\right)^8\right)^8\right)^8\right)^8 = 6^{85}$$

Esercizio 42

Semplificate gli esponenti delle seguenti elevazioni a potenza.

$3^{4+4+4+4+4}$; $5^{7\cdot 3+5\cdot 3}$; $8^{7\cdot 7\cdot 7\cdot 7\cdot 7}$

Esercizio 43
Semplificate gli esponenti delle seguenti elevazioni a potenza.

$a^{6+6+6+6+6+6}$; $c^{3\cdot6+4\cdot6}$; $x^{4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4}$

Esercizio 44
Mettete a confronto le uguaglianze delle figure 4 e 5, paragrafo 6.3, e dite quali sono le differenze tra le due elevazioni a potenza da esse rappresentate.

Esercizio 45
Eseguite i calcoli delle seguenti elevazioni a potenza e verificate i risultati ottenuti con l'uso di una calcolatrice.

2^{3^2} ; 5^{2^3} ; 4^{2^2} ; 3^{4^2}

Esercizio 46
Eseguite i calcoli delle seguenti elevazioni a potenza.

$(3^2)^3$; 3^{2^3} ; $(10^3)^4$; 10^{3^4}

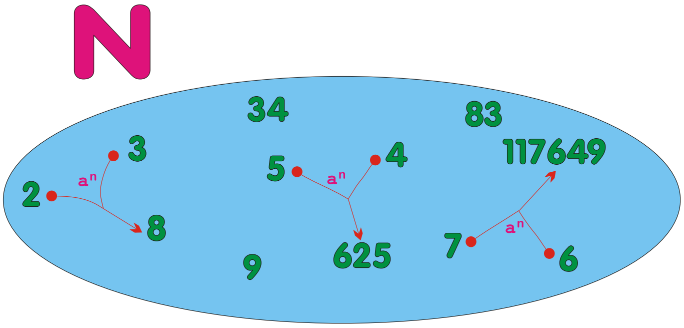
6.4C Proprietà dell'elevazione a potenza

Esercizio 47
Dite se le proprietà della moltiplicazione che avete studiate sono valide anche per l'elevazione a potenza.
Enunciate le proprietà prima con l'operazione di moltiplicazione e dopo, correggendole opportunamente, con l'operazione di elevazione a potenza.

Esercizio 48
Dite cosa significa dire che l'operazione di elevazione a potenza è interna all'insieme N.

Per esprimere che la moltiplicazione è una operazione interna all'insieme N si può ricorrere all'enunciato e alla figura seguenti.

L'insieme N è chiuso rispetto all'operazione di elevazione a potenza.



Legge di composizione interna di N

Il grafico mostra che le potenze dei numeri naturali si trovano all'interno dell'insieme N.

Esercizio 49
Osservate la figura 6 del paragrafo 6.4 e rispondete alle seguenti domande:
- Come si chiama il simbolo $\in$? ; cosa rappresenta?
- Come si chiama il simbolo $\Rightarrow$? ; cosa rappresenta?
- Cosa rappresentano le lettere a,b,c dell'uguaglianza?
- Leggete l'espressione seguente e stabilite se è vera

$$\text{se } a \in N \text{ e se } c \notin N \Rightarrow a^n \neq c$$

Esercizio 50
Dite se per l'elevazione a potenza è valida la proprietà commutativa.
Enunciatela e scrivetela in simboli.

Esercizio 51
Dite se per l'elevazione a potenza è valida la proprietà associativa.
Enunciatela e scrivetela in simboli.

Esercizio 52
Senza eseguire i calcoli dite quali uguaglianze sono vere e quali false.

a) $8^2 = 2^8$
$37 \cdot 56 = 56 \cdot 37$
$x \cdot y = y \cdot x$
$n+m = m+n$
$a^b = b^a$
$a \cdot c \cdot m = m \cdot a \cdot c$

b) $(n \cdot m) \cdot x = n \cdot (m \cdot x)$
$(a^n)^m = a^{(m^n)}$
$a+n+c = a+c+n$
$4^{8^9} = 4^{(8^9)}$
$a+b^3 = b^3+a$
$n+m \cdot c^7 = c^7 \cdot m+n$

Esercizio 53
Dite quali disuguaglianze sono vere e quali false.

a) $a+b+n \neq n+a+b$
$x \cdot (a+c) \neq x \cdot a+c$
$m^n \cdot a^c \neq a^c \cdot m^n$
$6^7 \cdot 8^4 \neq 8^4 \cdot 6^7$

b) $3^4+a^8+6^9 \neq a^8+6^9+3^4$
$(12^5)^7 \neq 12^{5^7}$
$3 \cdot 4^6+5^2 \cdot 7 \neq 7 \cdot 5^2+3 \cdot 4^6$
$a^{n^m} \neq a^{n \cdot m}$

Esercizio 54
Spiegate perché le seguenti uguaglianze sono vere.

a) $3^4 \cdot 3^7 = 3^{4+7}$
$5^7 \cdot 5^4 \cdot 5 = 5^{12}$
$(4^2)^3 = 4^{2 \cdot 3}$
$(5^{12})^{23} = 5^{276}$

b) $x^4 \cdot x^8 = x^{4+8}$
$y^{11} \cdot y^{32} = y^{43}$
$z^{m^3} = z^{m \cdot m \cdot m}$
$(c^{43})^{10} = c^{430}$

6.5C I numeri 0 e 1 nell'elevazione a potenza

Esercizio 55
Eseguite i calcoli delle seguenti elevazioni a potenza.

$13^1=$;	$34^0=$;	$1^{34}=$;	$0^6=$;
$1^1=$;	$1^0=$;	$0^0=$;	$0^1=$;
$(12^0)^7=$;	$5^{0^2}=$;	$8^{5+0+1}=$;	$12^{6 \cdot 0 \cdot 2}=$;
$a^1=$;	$0^b=$;	$1^c=$;	$x^0=$;
$(a^0)^0=$;	$(a^1)^1=$;	$a^{0^0}=$;	$a^{1^n}=$.

Esercizio 56
Qual è l'elemento neutro della moltiplicazione?
E quale quello dell'addizione?
Esiste l'elemento neutro per l'elevazione a potenza?

Sappiamo già che il numero 1, ad esponente delle elevazioni a potenza, non influisce nei calcoli: la potenza che si ottiene è uguale alla base.
Tuttavia esso non è l'elemento neutro per l'elevazione a potenza, perché questa operazione non ha la proprietà commutativa.
Pertanto:

$$a^1 = a \quad \text{ma} \quad 1^a \neq a$$

Questa caratteristica si esprime dicendo:

Il numero 1 è l'elemento neutro destro dell'elevazione a potenza.

6.6C Ordine di grandezza di un numero

Esercizio 57
Calcolate le potenze di dieci:
10^3 ; 10^6 ; 10^9 ; 10^{12} ; 10^{15}

Esercizio 58
Scrivete in forma ordinaria i seguenti numeri.
$3 \cdot 10^4$; $123 \cdot 10^8$; $84 \cdot 10^7$; $17 \cdot 10^5$;
$43 \cdot 10^6$; $601 \cdot 10^9$; $1001 \cdot 10^{12}$; $44 \cdot 10^4$

Esercizio 59
Scrivere i seguenti numeri come potenza di dieci.
10.000.000 ; 10.000.000 ; 100.000.000.000.000 ;
100.000 ; 100 ; 100.000.000.000 ; 1.000

Esercizio 60
Scrivete in forma polinomiale i seguenti numeri.
1.321.872 ; 36.548 ; 87.456.557 ; 666.666 ;
1.004.091 ; 23.045.444 ; 23.507.543.187 ; 345

Esercizio 61
Dite qual è l'ordine di grandezza dei seguenti numeri.
4.732 ; 567.673 ; 9.666.578 ; 2.323.211 ;
13.345.470 ; 4.678.656.904 ; 6.563.5002.008

Esercizio 62
Scrivere i seguenti numeri come prodotto di una potenza di dieci.
32.000.000 ; 2.900.000 ; 3410.000.000.000 ;
230.000.000 ; 71.450.000.000.000 ; 1.300.000.000

Esercizio 63
Scrivete in forma di potenza di dieci i seguenti numeri naturali.
Mille; un milione; un bilione; un trilione; un quadrilione; un quintilione.
(Se non si hanno le idee chiare su questi numeri si veda il paragrafo 2.3.)

Esercizio 64
Scrivete le seguenti misure come prodotto di una potenza di dieci e dite qual è il loro ordine di grandezza.

Distanza del pianeta Plutone dalla Terra:
Km 5.920.000.000
Distanza della stella Alfa Centauri dalla Terra:
Km 40.000.000.000.000
Massa del pianeta Urano:
t 86.750.000.000.000.000.000.000
Massa del pianeta Terra:
t 6.000.000.000.000.000.000.000
Temperatura al centro del Sole:
°C 15.000.000

Esercizio 65
Riuscireste a immaginare quanti zeri ha la seguente potenza con potenza ad esponente?

$$10^{10^{10^{10}}}$$

6.7C Espressioni numeriche e letterali

Esercizio 66
Eseguite i calcoli delle seguenti espressioni numeriche.
$3^3+12=$; $5^4\cdot 6+12=$; $342+13\cdot 2^4=$; $23\cdot 3^3+434=$

Esercizio 67
Eseguite i calcoli delle seguenti espressioni numeriche.
$2^3\cdot 5^2\cdot 3^4=$; $10^4+13^2+4^3+2^5=$; $7^3\cdot 1.000+8^2\cdot 25+2^7=$

Esercizio 68
Eseguite i calcoli delle seguenti espressioni numeriche.
a) $25^2+50\cdot 20^2+12\cdot 3^3+2^6=$; $13^2+11^3\cdot 7+31^2\cdot 10^4=$
b) $(5^3)^2+2^3+20^3\cdot 7+(10^3)^3+32+3^2=$; $7^2\cdot 5^3+2^2\cdot 10+23\cdot 5^4=$

Esercizio 69
Eseguite i calcoli delle seguenti espressioni numeriche.
a) $(4^2+12)\cdot 45=$; $(50\cdot 7+3^3)+2^4=$
b) $3^4+6^2+(77+17\cdot 3^5\cdot 2+83\cdot 3)+7^2=$
c) $(4^2+10^5\cdot 6+5\cdot 7)+(3^3+43\cdot 12)+7^4=$

Esercizio 70
Eseguite i calcoli delle seguenti espressioni numeriche.
a) $[2^2+(31^0\cdot 7^3+7^1\cdot 3)]+2^4=$ [384]
b) $[12^2+12^2+(3\cdot 4)^2+(6\cdot 2)^2+12^2+12^2]+12\cdot 12=$ [$7\cdot 12^2$]
c) $(2^3\cdot 3^2)\cdot 7+[(4+10^4+3^5)+4\cdot 9]=$ [10.787]

Esercizio 71
Eseguite i calcoli delle seguenti espressioni numeriche.
a) $\{[(2^4+4^2\cdot 5)+5^3+11^2+34]+13^2+14^2\}+6\cdot 3^2=$ [795]
b) $6^3+\{4^3+[3^4+(5\cdot 7^2+3^5)+9^2]+10^6\}+8^3=$ [1.001.442]
c) $3^2+3^3+\{[3^4+(3^5+3^6)+3^7]+3^8\}+3^9=$ [29.520]

Esercizio 72
Eseguite i calcoli delle seguenti espressioni numeriche.
a) $(6^3\cdot 7^4+8^5)^0\cdot\{4^3+[(6^3+2^5\cdot 5^2)+213]+10^4\}=$ [11.293]
b) $(4^5+5\cdot 19)+\{5^2+[(15^2+21\cdot 100)+8^3]+9^4\}=$ [10.542]
c) $\{[(43+16\cdot 7^2)+16^2]+17^2\}+\{[31+(53+5^4)]+2^5\}=$ [2113]

Esercizio 73
Eseguite i calcoli delle seguenti espressioni numeriche.

a) $[4^3\cdot(5\cdot2^3+7^2)+8^3\cdot(5+5^3)]\cdot7+\{[(4+7^2)\cdot6^2]+17\}=$ [507717]

b) $8\cdot[(4^4\cdot5+8)\cdot(4\cdot8^2+8)]+\{21\cdot[30\cdot(7+4\cdot9)]+11\}\cdot2=$ [2774458]

c) $\{77\cdot(12+21)^2+[47\cdot(7^3+8^3)+63]+79\}\cdot(12+3\cdot17)=$ [7823340]

Esercizio 74
Semplificate le seguenti espressioni numeriche.

$3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3=$

$17\cdot17\cdot17\cdot17\cdot17\cdot17\cdot17\cdot17\cdot17=$

$51\cdot51\cdot51\cdot51\cdot51\cdot51\cdot51\cdot51\cdot51\cdot51\cdot51\cdot51\cdot51\cdot51\cdot51\cdot51=$

Esercizio 75
Semplificate le seguenti espressioni numeriche.

$7\cdot7\cdot7\cdot7\cdot8\cdot8\cdot8\cdot8\cdot8\cdot8\cdot11\cdot11\cdot11\cdot11\cdot11\cdot11\cdot11=$

$31\cdot31\cdot31\cdot31\cdot19\cdot19\cdot19\cdot19\cdot41\cdot41\cdot23\cdot23\cdot23=$

$4\cdot4\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot9\cdot9\cdot13\cdot13=$

$21\cdot56\cdot21\cdot56\cdot21\cdot12\cdot21\cdot56\cdot21\cdot12\cdot56\cdot12\cdot12\cdot21\cdot12\cdot56=$

Esercizio 76
Semplificate le seguenti espressioni letterali.

$a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a=$

$n\cdot n\cdot n\cdot n\cdot n\cdot n\cdot n\cdot n\cdot n\cdot n\cdot n\cdot n\cdot n\cdot n=$

$z\cdot z=$

Esercizio 77
Semplificate le seguenti espressioni letterali.

$a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot b\cdot b\cdot b\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x=$

$c\cdot c\cdot c\cdot c\cdot c\cdot a\cdot a\cdot b\cdot b\cdot x\cdot x\cdot m\cdot m\cdot m\cdot m\cdot y\cdot y\cdot y\cdot y=$

$c\cdot c\cdot n\cdot n\cdot a\cdot a\cdot m\cdot m\cdot y\cdot y\cdot z\cdot z=$

$x\cdot x\cdot z\cdot x\cdot z\cdot z\cdot y\cdot y\cdot x\cdot y\cdot x\cdot z\cdot z\cdot x\cdot x\cdot x\cdot z\cdot y\cdot y\cdot z\cdot x=$

Esercizio 78
Semplificate le seguenti espressioni numeriche.

$3\cdot4\cdot4\cdot3\cdot3\cdot4\cdot3\cdot4\cdot4\cdot4\cdot3\cdot3\cdot3=$

$5\cdot3\cdot6\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot8\cdot3\cdot5\cdot6\cdot6\cdot5\cdot3\cdot3\cdot8\cdot8\cdot5\cdot8\cdot8\cdot3\cdot5\cdot3\cdot6\cdot6\cdot5=$

$12\cdot43\cdot43\cdot12\cdot67\cdot12\cdot43\cdot67\cdot67\cdot12\cdot43\cdot43\cdot12\cdot67\cdot67\cdot12=$

$36\cdot36\cdot67\cdot67\cdot42\cdot36\cdot67\cdot67\cdot36\cdot42\cdot42\cdot18\cdot18\cdot42\cdot18\cdot36\cdot18=$

Esercizio 79

Semplificate le seguenti espressioni.

$a \cdot a \cdot 6 \cdot 6 \cdot a \cdot 6 \cdot 6 \cdot a \cdot a \cdot 6 \cdot 6 \cdot a=$

$13 \cdot 13 \cdot x \cdot x \cdot c \cdot x \cdot 16 \cdot x \cdot c \cdot 16 \cdot c \cdot 13 \cdot 16 \cdot x \cdot c \cdot 13 \cdot 16 \cdot 16=$

$a \cdot x \cdot 31 \cdot 34 \cdot x \cdot x \cdot 34 \cdot a \cdot 31 \cdot 34 \cdot a \cdot x \cdot a \cdot 31 \cdot 34 \cdot x \cdot a \cdot 31 \cdot x=$

Esercizio 80

Semplificate le seguenti espressioni numeriche.

$4^3 \cdot 4^5 \cdot 4 \cdot 4^2=$

$7^6 \cdot 7^3 \cdot 7^5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 8^7 \cdot 8^4 \cdot 8=$

$37^3 \cdot 37^6 \cdot 37^4 \cdot 79^7 \cdot 79^6 \cdot 79 \cdot 79^2=$

Esercizio 81

Semplificate le seguenti espressioni letterali.

$a^3 \cdot a^6 \cdot a=$

$c^5 \cdot c \cdot c^3 \cdot x^2 \cdot x^5 \cdot x \cdot x^2=$

$y^4 \cdot y^3 \cdot y \cdot z^3 \cdot z^2 \cdot z^2 \cdot z \cdot n^6 \cdot n \cdot n^5 \cdot n^3 \cdot n^2=$

Esercizio 82

Semplificate le seguenti espressioni numeriche.

$4^7 \cdot 5^8 \cdot 4^6 \cdot 4 \cdot 5^3 \cdot 5 \cdot 4^3=$

$13^4 \cdot 43^5 \cdot 43 \cdot 71^3 \cdot 13^2 \cdot 43^4 \cdot 71 \cdot 71^2 \cdot 43^5 \cdot 13^5=$

$7^4 \cdot 27^4 \cdot 7^5 \cdot 39^4 \cdot 27^3 \cdot 39^7 \cdot 44^4 \cdot 44^5 \cdot 39^2 \cdot 27 \cdot 7^3 \cdot 27^2 \cdot 44=$

Esercizio 83

Semplificate le seguenti espressioni letterali.

$c^3 \cdot x^4 \cdot y^5 \cdot x^2 \cdot c \cdot c \cdot y^5 \cdot c^4 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y^4=$

$m^3 \cdot y \cdot m \cdot y^5 \cdot m^6 \cdot y \cdot m \cdot m \cdot y^6 \cdot y^5 \cdot m^3 \cdot m^2=$

$z \cdot n \cdot a^3 \cdot n^4 \cdot z^7 \cdot a^2 \cdot a \cdot z^7 \cdot a^4=$

Esercizio 84

Semplificate le seguenti espressioni.

$3^4 \cdot a^4 \cdot 5^5 \cdot 3^2 \cdot a^6 \cdot 5^4=$

$x^4 \cdot 11^3 \cdot x^5 \cdot y^2 \cdot n^6 \cdot 11^5 \cdot x \cdot 11 \cdot n^3 \cdot 11^4 \cdot x^3=$

$5^6 \cdot z \cdot 5^3 \cdot z^8 \cdot 7^6 \cdot x^3 \cdot 7^{12} \cdot 5^{13} \cdot 7^9 \cdot z^{14} \cdot x^{18}=$

Esercizio 85

Semplificate le seguenti espressioni.

$a^5 \cdot b^6 \cdot 6^6 \cdot c^4 \cdot 6^5 \cdot a^3 \cdot 9^7 \cdot b^4 \cdot a^4 \cdot c^7 \cdot c \cdot 6^8 \cdot 9^{10} \cdot b^8 \cdot b \cdot 9^2 \cdot a^5=$

$13^6 \cdot 61^6 \cdot x^5 \cdot y^9 \cdot 13^4 \cdot x^7 \cdot 61^8 \cdot y^{20} \cdot 13 \cdot y^9 \cdot 61^5 \cdot 13^6 \cdot x^{15} \cdot 61=$

Esercizio 86
Semplificate le seguenti espressioni numeriche.

$6+6+6+6+7\cdot7\cdot7\cdot7\cdot7\cdot7=$

$9+9+9+9+9\cdot9\cdot9\cdot9\cdot9\cdot9=$

$23\cdot23\cdot23\cdot23\cdot23+23\cdot23\cdot23\cdot23=$

Esercizio 87
Semplificate le seguenti espressioni numeriche.

$5\cdot5\cdot5\cdot5+5+5+5+5+5+5+5\cdot5\cdot5+5+5+5+5+5+5+5=$

$13+13\cdot13+13\cdot13\cdot13+13\cdot13\cdot13\cdot13+13\cdot13\cdot13\cdot13\cdot13=$

$21+21+21+21\cdot21\cdot21+21+21+21+21+21+21\cdot21\cdot21\cdot21=$

Esercizio 88
Semplificate le seguenti espressioni letterali.

$a\cdot a\cdot a\cdot a+b+b+b+b=$

$a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a+b+b+b+b+b+a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a=$

$c\cdot c\cdot c\cdot c\cdot c+c+c+c+c+c=$

$x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x+x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x=$

Esercizio 89
Semplificate le seguenti espressioni letterali.

$b\cdot b\cdot b\cdot b\cdot b+b+b+b+b+b+b\cdot b\cdot b+b+b+b\cdot b\cdot b=$

$a+a\cdot a+a\cdot a\cdot a+a\cdot a\cdot a\cdot a+a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a+a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a=$

$a\cdot b\cdot a\cdot a\cdot b\cdot b\cdot a\cdot a+a+a+b+b+a+a+b+a+b+b=$

Esercizio 90
Eseguite delle semplificazioni del 3° ordine nelle seguenti espressioni.

$4^3+4^3+4^3+4^3+4^3+4^3=$

$a^8+a^8+a^8+a^8+a^8+a^8=$

$7^8+7^8+7^8+7^8+5^9+5^9+5^9+5^9=$

$x^5+x^5+x^5+z^7+z^7+z^7+z^7+z^7+z^7=$

Esercizio 91
Semplificate le seguenti espressioni numeriche.

$5^3\cdot5^4\cdot5+5^8+5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5+5^8+5^3\cdot5^5=$ $[5^9]$

$7\cdot7\cdot7\cdot7\cdot7\cdot7+7^6+7\cdot7\cdot7\cdot7\cdot7\cdot7+7^3\cdot7^3+7^2\cdot7^4+7^6+7^6=$ $[7^7]$

$4^4+4^4+4^4+4^4+4^5+4^5+4^5+4^6+4^6+4^6=$ $[4^7]$

$(6+6+6+6+6+6)\cdot6^3+6^5+6^5+6^5+(4\cdot6+2\cdot6)\cdot6^3+6^5=$ $[6^6]$

Esercizio 92
Semplificate le seguenti espressioni.

$a^2 \cdot a^3 + b^4 \cdot b^2 + a^5 + 3 \cdot a^5 + b^6 + 4 \cdot b^6 =$

$3 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a + 7 \cdot a^6 + a^3 \cdot a^3 + 5 \cdot a^6 =$

$6 \cdot c^4 \cdot c^2 + x^3 + 4 \cdot c^6 + 4 \cdot x \cdot x^2 + c^6 + x^3 + c \cdot c^5 =$

$z^2 \cdot z^3 \cdot z + n^4 \cdot n \cdot n^3 + x \cdot x^2 \cdot x \cdot x^3 + n^2 \cdot n^2 \cdot n^2 \cdot n^2 + z^3 \cdot z^3 + x^3 \cdot x^3 \cdot x + n^8 =$

Esercizio 93
Semplificate le seguenti espressioni.

$a^3 \cdot c^4 + a^3 \cdot c^4 + a^3 \cdot c^4 + a^3 \cdot c^4 + a^3 \cdot c^4 + a^3 \cdot c^4 + a^3 \cdot c^4 + a^3 \cdot c^4 =$

$x^5 \cdot y^6 + x^5 \cdot y^6 + x^5 \cdot y^6 + x^5 \cdot y^6 + x^5 \cdot y^6 + x^5 \cdot y^6 + x^5 \cdot y^6 + x^5 \cdot y^6 + x^5 \cdot y^6 + x^5 \cdot y^6 =$

$4 \cdot n^7 + 4 \cdot n^7 + 4 \cdot n^7 + 4 \cdot n^7 + 4 \cdot n^7 + 4 \cdot n^7 + 4 \cdot n^7 + 4 \cdot n^7 + 4 \cdot n^7 + 4 \cdot n^7 =$

$x \cdot y \cdot z + x \cdot y \cdot z + x \cdot y \cdot z + x \cdot y \cdot z + x \cdot y \cdot z + x \cdot y \cdot z + x \cdot y \cdot z + x \cdot y \cdot z =$

Esercizio 94
Semplificate le seguenti espressioni.

$x^4 \cdot y^5 + x^4 \cdot y^5 + n \cdot c^6 + n \cdot c^6 + x^4 \cdot y^5 + n \cdot c^6 + x^4 \cdot y^5 =$

$b^3 \cdot c^2 + m^6 \cdot z^5 + b^3 \cdot c^2 + m^6 \cdot z^5 + m^6 \cdot z^5 + b^3 \cdot c^2 =$

$a^7 \cdot x^4 + c^3 \cdot b^8 + c^3 \cdot b^8 + a^7 \cdot x^4 + c^3 \cdot b^8 + a^7 \cdot x^4 + c^3 \cdot b^8 + a^7 \cdot x^4 =$

Esercizio 95
Semplificate le seguenti espressioni.

$3 \cdot a^3 \cdot c^4 + 6 \cdot a^3 \cdot c^4 + 5 \cdot x^5 \cdot y^2 + 7 \cdot x^5 \cdot y^2 =$

$n \cdot c^5 + x^3 \cdot y^6 + 5 \cdot n \cdot c^5 + 8 \cdot x^3 \cdot y^6 + 4 \cdot n \cdot c^5 =$

$6 \cdot a^6 + 7 \cdot c \cdot x^4 + a^6 + b \cdot c^4 + 8 \cdot c \cdot x^4 + 3 \cdot b \cdot c^4 + a^6 + 4 \cdot b \cdot c^4 =$

Esercizio 96
Semplificate le seguenti espressioni.

$a^3 \cdot a \cdot a^4 + a \cdot a^2 \cdot a^4 \cdot a + c \cdot c^2 \cdot c^2 + c^3 \cdot c^2 =$

$2 \cdot x \cdot x^3 \cdot x^5 + 4 \cdot y \cdot y^3 \cdot y^4 + 5 \cdot x^2 \cdot x^4 \cdot x^3 + 7 \cdot y^5 \cdot y^3 =$

$4 \cdot a \cdot 3 \cdot a^4 \cdot 2 \cdot a + c \cdot 4 \cdot c^3 \cdot c^5 \cdot 2 + 8 \cdot a^3 \cdot 4 \cdot a \cdot a^2 + 6 \cdot c^2 \cdot 5 \cdot c^3 \cdot 2 \cdot c^4 =$

$n^3 \cdot x^3 \cdot 5 \cdot n \cdot 6 \cdot n^2 \cdot x^5 + 7 \cdot y^2 \cdot 3 \cdot y^3 \cdot 2 \cdot y^4 + 2 \cdot n^4 \cdot 3 \cdot n \cdot 5 \cdot n \cdot x^4 \cdot x^3 \cdot x + y^9 =$

Esercizio 97
Semplificate le seguenti espressioni.

$3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + 10 \cdot 8 =$

$4 \cdot a + a \cdot 6 + a =$

$6 \cdot 12 + 12 \cdot 4 + 5 \cdot 10 + 7 \cdot 17 =$ [17^2]

$7 \cdot 9 + 7 \cdot 12 + 21 \cdot 14 =$ [21^2]

Esercizio 94

Semplificate le seguenti espressioni.

$4+9+4+15+4+15+4+9+15+4+9+4+15+15+9=$	$[9\cdot15]$
$13+17+5+5+13+17+5+13+5+13+13+17+17=$	$[9\cdot17]$
$8+8+13+6+8+6+6+8+13+13+6+8+13+8+6+13+13+13=$	$[13^2]$

Esercizio 95

Eseguite sia delle semplificazioni del 5° ordine sia del 6° ordine nelle seguenti espressioni.

$8^6\cdot8^6\cdot8^6\cdot8^6\cdot8^6\cdot8^6\cdot8^6=$

$13^7\cdot13^7\cdot13^7\cdot13^7\cdot13^7\cdot13^7\cdot13^7\cdot13^7\cdot13^7\cdot13^7=$

$23^9\cdot23^9\cdot23^9\cdot23^9\cdot23^9\cdot23^9\cdot23^9\cdot23^9\cdot23^9\cdot23^9\cdot23^9=$

Esercizio 96

Semplificate le seguenti espressioni.

$a^3\cdot a^3\cdot a^3\cdot a^3\cdot a^3=$

$x^7\cdot x^7\cdot x^7\cdot x^7\cdot x^7\cdot x^7=$

$n^{12}\cdot n^{12}\cdot n^{12}\cdot n^{12}\cdot n^{12}\cdot n^{12}\cdot n^{12}\cdot n^{12}\cdot n^{12}=$

Esercizio 97

Semplificate le seguenti espressioni.

$9^6\cdot9^6\cdot7^8\cdot7^8\cdot7^8=$

$6^5\cdot6^5\cdot6^5\cdot6^5\cdot6^5\cdot5^4\cdot5^4\cdot5^4\cdot5^4=$

$a^4\cdot a^4\cdot a^4\cdot a^4\cdot c^5\cdot c^5\cdot c^5\cdot c^5\cdot c^5=$

$x^3\cdot z^5\cdot x^3\cdot z^5\cdot z^5\cdot x^3\cdot z^5\cdot z^5=$

$2^7\cdot y^6\cdot n^5\cdot2^7\cdot y^6\cdot y^6\cdot n^5\cdot n^5\cdot2^7\cdot n^5\cdot n^5=$

Esercizio 98

Semplificate gli esponenti delle seguenti espressioni.

$a^{3+3+3+3+3+3}=$; $9^{5\cdot5\cdot5\cdot5}+10^{7\cdot7\cdot7\cdot7\cdot7\cdot7}+23^{8\cdot8\cdot8\cdot8\cdot8\cdot8}=$

$c^{4+4+4+4+4}+n^{6+6+6+6}=$; $x^{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a}+y^{b\cdot b\cdot b\cdot b\cdot b\cdot b}=$

$x^{a+a+a+a+a}+y^{c+c+c+c}=$; $a^{x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x}+c^{y\cdot y\cdot y\cdot y\cdot y\cdot y\cdot y}=$

Esercizio 99

Semplificate gli esponenti delle seguenti espressioni.

$a^{3\cdot7+5\cdot7+7}+b^{6\cdot10+8\cdot10}=$; $a^{3\cdot c+6\cdot c}\cdot b^{4\cdot n+7\cdot n+n}=$

$x^{7\cdot13+4\cdot13+2\cdot13}+y^{5\cdot9+4\cdot9}=$; $x^{a+a+a+5\cdot a}\cdot y^{c+c+c+6\cdot c}=$

$m^{3\cdot a+5\cdot a+a}\cdot n^{6\cdot b+5\cdot b+b}=$; $m^{3\cdot x+6\cdot x+2\cdot x}\cdot n^{3\cdot y+6\cdot y+2\cdot y}$

$c^{m\cdot m\cdot m+n\cdot n}\cdot x^{7\cdot n+6\cdot n}=$; $z^{m\cdot m+n\cdot n\cdot n}\cdot x^{a\cdot a\cdot a\cdot b\cdot b\cdot b}=$


7^2