4ª Unità

operazioni inverse ed equazioni in N

7. **Operazione di sottrazione**
8. **Operazione di divisione**
9. **Operazioni di estrazione di radice e di logaritmo**

Matematica di base - 4ª Unità del libro N

vincenzovitale@tim.it - vincenzovitale@integernumbers.org
http://www.integernumbers.org

Vitale Vincenzo

L'operazione di sottrazione

7

7.1 Le equazioni in N

Esercizio 1
Calcolate qual è il numero naturale che si deve sostituire alla lettera x, affinché si verifichi la seguente uguaglianza.

$$x+17=53$$

Nell'uguaglianza dell'esercizio, con la lettera x si è indicato un numero incognito, cioè un numero di cui non si conosce il valore.
Si dice che la x è una incognita.
Ogni volta che si dovrà indicare un numero incognito si userà preferibilmente una delle seguenti lettere:

x (ics) ; y (ipsilon) ; z (zeta) ; w (vu)

Definizioni

- Un'uguaglianza in cui c'è una incognita si dice **equazione**.
- Risolvere una equazione significa trovare il valore dell'incognita in essa contenuta.

Per risolvere l'equazione dell'esercizio 1 si può procedere per tentativi.
Sostituendo all'incognita x un numero naturale a piacere, si faccia la verifica dell'uguaglianza ottenuta.
Si ponga, ad esempio, 10 al suo posto.
Si otterrà l'uguaglianza:

$$10+17=53$$

Ma, eseguendo i calcoli, essa non risulta vera:

$$10+17 \neq 53$$

Pertanto il valore della x è diverso da 10:

$$x \neq 10$$

Si dedurrà anche facilmente che il numero incognito è maggiore di 10:

$$x > 10$$

(Per i simboli > e < si veda il paragrafo 1.2).
Si sostituisca allora un numero più grande di 10.
Sia esso, ad esempio, 40.
Neanche questa volta l'uguaglianza risulta vera:

$$40+17\neq 53$$

per cui: $x\neq 40$

Si dedurrà anche che l'incognita ha un valore minore:

$$x < 40$$

La x quindi è compresa tra 10 e 40:

$$10 < x < 40$$

Scegliendo un numero naturale maggiore di 10 e minore di 40 si farà un'altra verifica. Continuando in questo modo, l'intervallo in cui ricercare il valore della x si restringerà sempre più e così alla fine si troverà che l'incognita vale 36:

$$x=36$$

Infatti, sostituendo nell'equazione questo numero, la uguaglianza che si ottiene risulta vera:

$$36+17=53$$

Esercizio 2
Risolvete la seguente equazione.

$$29+y=100$$

Procedendo per tentativi, così come è stato fatto per

l'esercizio 1, si troverà che l'incognita vale 71:

$$y=71$$

Infatti, sostituendo alla y dell'equazione il numero naturale 71, l'uguaglianza che si ottiene è vera.

$$29+71=100$$

Per risolvere le equazioni è necessario stare attenti alle operazioni che influiscono sull'incognita.
Nelle equazioni degli esercizi 1 e 2 le due incognite x ed y sono degli addendi, perché accanto a ciascuna di esse c'è il segno + dell'addizione.

Mettendo le lettere al posto dei numeri, le equazioni con un addendo incognito avranno la forma generale della figura 1 seguente.

$$x+a=b$$

$$a\,;\,b \in N$$

EQUAZIONE IN N CON ADDENDO INCOGNITO

fig.1

Esercizio 3
Osservate il riquadro della fig.1 e spiegate qual è il significato dei simboli rappresentati.

E' opportuno fare le seguenti osservazioni:
- L'uguaglianza è una equazione, perché c'è una incognita a primo membro.
- L'incognita x è un addendo, perché accanto ad essa c'è il segno + dell'addizione.
- Il simbolo $\in$ indica che l'addendo a e la somma b rappresentano due numeri naturali.

Si badi bene che non è sufficiente che i termini noti a,b dell'equazione siano numeri naturali per potere concludere che il termine incognito x è anch'esso un numero naturale.

A questo proposito si consideri la seguente

definizione

Si dice che una equazione è risolvibile in N se esiste un numero naturale n che sostituito all'incognita verifichi l'uguaglianza.

Affinché l'equazione con un addendo incognito, rappresentata dalla fig.1, sia risolvibile in N è necessario aggiungere la condizione che la somma b sia maggiore oppure uguale all'addendo noto a.

$$a+x=b \qquad a;b \in N$$

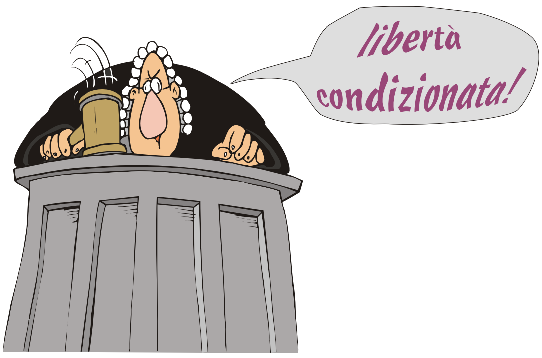
$$\text{se} \quad b \geq a \quad \Rightarrow \quad x \in N$$

IL simbolo ≥ è l'unione dei due simboli > e = ; esso indica che si può verificare indifferentemente l'una o l'altra delle due relazioni.

($b \geq a$ si legge: b è maggiore o uguale ad a).

Le condizioni, affinché le equazioni siano risolvibili in N, dipendono dalle operazioni risolventi.

Pertanto, in seguito, studiando le caratteristiche e le proprietà delle operazioni inverse, avremo modo di chiarire meglio le idee su questo argomento.



7.2 L'operazione di sottrazione in N

Esercizio 4
Risolvete la seguente equazione.
x+19=32

Seguendo il procedimento per tentativi, così come è stato fatto per gli esercizi del paragrafo precedente, si arriverà alla conclusione che l'incognita vale 13:

x=13

Infatti, sostituendo questo valore alla x dell'equazione, l'uguaglianza che si ottiene è vera:

13+19=32

Adesso però dobbiamo trovare un metodo che ci consenta di eseguire i calcoli più rapidamente.
A questo fine è bene ricordare il procedimento che abbiamo usato nel paragrafo 4.1 per calcolare la somma di due addendi.

Anche questa volta, per risolvere le equazioni con un addendo incognito, ci serviremo della semiretta dei naturali.
Dopo averla disegnata, poniamoci sul punto 32, il quale rappresenta la somma nell'equazione dell'esercizio 4.

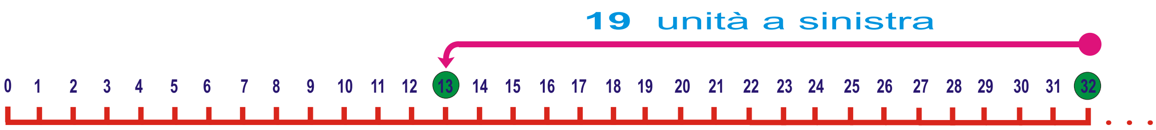


fig.2

Si consideri che questo è il punto a cui si arriva addizionando alle unità dell'addendo incognito quelle dello addendo noto.
Di conseguenza, per risolvere l'equazione data, è sufficiente procedere in senso inverso.
Dal punto 32 ci sposteremo verso sinistra di tante unità quante ne indica l'addendo noto, cioè di 19 unità.

Arriveremo così al punto contrassegnato dal numero 13, il quale rappresenta il valore dell'addendo incognito. Si veda la figura 2.

Definizioni

- Il procedimento utilizzato per risolvere le equazioni con un addendo incognito si dice **operazione di sottrazione.**

- Il primo numero della sottrazione si dice **minuendo**, il secondo numero si dice **sottraendo**, il risultato si dice **differenza** .

- L'operazione di sottrazione si indica ponendo il segno **-** (**meno**) tra il minuendo e il sottraendo.

Secondo queste definizioni, risolvere l'equazione, data dall'esercizio 4, equivale ad eseguire un'operazione di sottrazione tra la somma 32 e l'addendo noto 19.
La corrispondente scrittura simbolica è la seguente.

$x+19=32$
$x=32-19=13$

minuendo sottraendo differenza

$$32-19=13$$

Sostituendo le lettere ai numeri, la sottrazione assumerà la forma generale della figura 3 seguente.

$$b-a=c$$
$$b \geq a$$
$$a,b,c \in N$$

Operazione di sottrazione in N

fig.3

Se i calcoli da eseguire per ricavare la differenza tra due numeri non sono immediati, si ricorrerà al già noto algoritmo della sottrazione, oppure all'uso di una calcolatrice.

Esercizio 5
Risolvete le seguenti equazioni con addendo incognito.
$x+30=50$; $37+y=60$; $z+234=981$; $1023+w=7021$

Risolvere le prime due equazioni è abbastanza semplice.
Si può visualizzare l'operazione di sottrazione muovendosi sulla semiretta dei naturali.

$x=50-30=20$; $y=60-37=23$

Per risolvere le altre due equazioni è invece opportuno o eseguire l'algoritmo della sottrazione o utilizzare una calcolatrice.

$z=981-234=747$

$w=7021-1023=5998$

$$\begin{array}{r} 981- \\ 234 \\ \hline 747 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7021- \\ 1023 \\ \hline 5998 \end{array}$$

7.3 Proprietà della sottrazione

Esercizio 6
Rivedete le proprietà dell'addizione e stabilite se sono valide anche per la sottrazione.

- Verifichiamo se è valida la legge di composizione interna.

Dobbiamo stabilire se la differenza tra due qualsiasi numeri naturali è ancora un numero naturale.
A questo fine svolgiamo il seguente esercizio.

Esercizio 6.1
Risolvete la seguente equazione.
$17+x=15$

Si osserverà che in questa equazione l'addendo noto è maggiore della somma, per cui non esiste alcun numero naturale che addizionato a 17 dà per risultato 15.
Quindi non è possibile risolvere questa equazione in N.

Visualizziamo il calcolo della differenza tra il minuendo 15 e il sottraendo 17.
Ponendoci nel punto 15 della semiretta dei naturali ci dobbiamo spostare a sinistra di 17 unità.

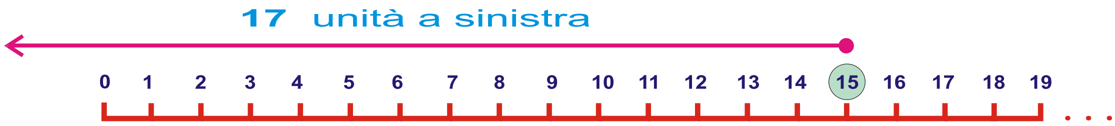


fig.4

Ma **la semiretta dei naturali è limitata a sinistra**, per cui, dopo esserci spostati di 15 unità a sinistra, si arriva allo zero e non è più possibile continuare.
Quindi non è possibile eseguire questa operazione in N.

Tenuto conto di ciò, scriveremo:

$17+x=15$	**L'equazione non è risolvibile in N.**
$x=15-17=?$	**La sottrazione non si può eseguire in N.**

Enunciato

Quando il minuendo è minore del sottraendo l'operazione di sottrazione non si può eseguire in N.

$$\boxed{b<a \Rightarrow b-a \notin N}$$

fig.5

Si osservi il riquadro della figura 3, paragrafo 7.2.
Adesso si comprenderà meglio perché, nel rappresentare l'operazione di sottrazione in N, si è posto $b \geq a$.
Solo se si verifica questa condizione la differenza di due numeri naturali è ancora un numero naturale.

Dato che la sottrazione tra due qualsiasi numeri naturali non si può eseguire sempre, si esprimerà il seguente

enunciato

L'operazione di sottrazione non è una legge di composizione interna di N.

- Verifichiamo la validità della proprietà commutativa.

A questo fine svolgiamo il seguente esercizio.

Esercizio 6.2
Stabilite se la seguente uguaglianza è vera o falsa.
$37-21=21-37$

Eseguiamo i calcoli a primo membro:

$37-21=16$

Eseguiamo i calcoli a secondo membro:

$21-37=?$ *questa sottrazione non si può eseguire in N*

Poiché i risultati ottenuti sono differenti, l'uguaglianza non è vera:

$$37-21 \neq 21-37$$

Si osservi che questa disuguaglianza vale in generale, per una qualsiasi altra coppia di numeri naturali.
Quindi, poiché il risultato della sottrazione cambia, se si muta l'ordine dei suoi termini, esprimeremo il seguente

enunciato

L'operazione di sottrazione non ha la proprietà commutativa.

$$\boxed{b-a \neq a-b}$$

fig.6

- Verifichiamo se è valida la proprietà associativa.

A questo fine svolgiamo l'esercizio seguente.

Esercizio 6.3
Stabilite se la seguente uguaglianza è vera o falsa.
$(34-13)-7=34-(13-7)$

Eseguiamo i calcoli a primo membro:

$$(34-13)-7=$$
$$=21-7=14$$

Eseguiamo i calcoli a secondo membro:

$$34-(13-7)=$$
$$=34-6=28$$

I risultati sono differenti:

$$(34-13)-7 \neq 34-(13-7)$$

Osservando che questa disuguaglianza vale in generale, per una qualsiasi altra terna di numeri naturali, possiamo esprimere il seguente

enunciato

L' operazione di sottrazione non ha la proprietà associativa.

$$(a-b)-c \neq a-(b-c)$$

fig.7

Esaminiamo ancora l'operazione di sottrazione per scoprire altre proprietà che la caratterizzano.

Si osservi la figura 8 seguente.

Essa rappresenta molto bene la connessione esistente tra l'addizione e la sottrazione.

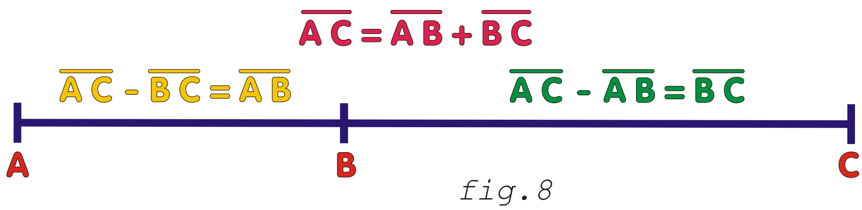


fig.8

Infatti la relazione esistente fra i tre segmenti $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ può essere espressa da ciascuna delle tre uguaglianze della figura.

Dal momento che sono equivalenti, sarà possibile sostituire ad ognuna di esse, una delle altre due uguaglianze, ogni qualvolta lo riterremo opportuno.

Si potranno fare, ad esempio, le seguenti sostituzioni:

$\overline{AC}-\overline{BC}=\overline{AB}$ con $\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}$

$\overline{AC}-\overline{AB}=\overline{BC}$ con $\overline{AC}=\overline{BC}+\overline{AB}$

Queste due sostituzioni caratterizzano la

proprietà fondamentale della sottrazione

In ogni sottrazione il minuendo è uguale alla somma della differenza con il sottraendo.

Con l'uso dei simboli questa proprietà sarà espressa dall'implicazione logica della figura 9 seguente.

$$a-b=c \Rightarrow a=c+b$$

Proprietà fondamentale della sottrazione

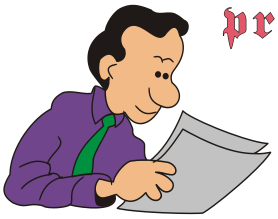
fig.9

Altre sostituzioni nelle uguaglianze della figura 8 potranno essere fatte nel seguente modo:

$\overline{AC}-\overline{BC}=\overline{AB}$ con $\overline{AC}-\overline{AB}=\overline{BC}$

$\overline{AC}-\overline{AB}=\overline{BC}$ con $\overline{AC}-\overline{BC}=\overline{AB}$

Queste due sostituzioni caratterizzano una caratteristica della sottrazione che definiremo:



proprietà del permutare della sottrazione

Se in una sottrazione si permuta la differenza con il sottraendo si mantiene l'uguaglianza.

Usando i simboli questa proprietà sarà espressa dalla implicazione logica della figura 10 seguente.

$$a-b=c \Rightarrow a-c=b$$

Proprietà del permutare della sottrazione

fig.10

7.4 Operazioni dirette e inverse

Definizioni

- **Si dicono operazioni dirette quelle che influiscono sull'incognita di una equazione.**
- **Si dicono operazioni inverse delle dirette quelle che si devono eseguire per risolvere l'equazione.**

Esercizio 7
Risolvete le seguenti equazioni.
$43+x=213$; $y+325=3201$

Nel paragrafo 7.2 abbiamo affrontato il problema di come

risolvere le equazioni con un addendo incognito e abbiamo stabilito che l'operazione con cui esse si risolvono è la sottrazione.
Adesso è opportuno sottolineare che, in questo tipo di equazione, l'incognita può comparire a primo posto o a secondo posto, senza che muti l'operazione risolvente.
Ciò è dovuto al fatto che per l'operazione di addizione vale la proprietà commutativa:

$$x+a=a+x$$

Svolgendo l'esercizio 7, si avrà:

$43+x=213$
$x=213-43=170$

$y+325=3201$
$y=3201-325=2876$

Per risolvere entrambe le equazioni si è eseguita una sola operazione: la sottrazione.

Tenendo conto delle definizioni date all'inizio di questo paragrafo, si concluderà con il seguente

enunciato

L'equazione con un addendo incognito ha come operazione diretta l'addizione e come operazione inversa la sottrazione.

In simboli questo tipo di equazione e l'espressione risolvente avranno la forma generale della figura 11 seguente.

$$x+a=b$$
$$x=b-a$$

L'ADDIZIONE HA UNA OPERAZIONE INVERSA SOLTANTO: LA SOTTRAZIONE

fig.11

Esercizio 8
Risolvete le seguenti equazioni.
$x-673=801$; $8608-y=5231$

In entrambe le equazioni l'operazione che influisce sulle incognite è la sottrazione, la quale assume il ruolo di operazione diretta.

In queste equazioni, al contrario di quando l'operazione in considerazione è l'addizione, si deve stare attenti al posto occupato dall'incognita.
Infatti la sottrazione non ha la proprietà commutativa:

$$a-x \neq x-a$$

Cosicché, quando l'operazione diretta è la sottrazione, bisogna distinguere le equazioni con il minuendo incognito dalle equazioni con il sottraendo incognito.

- Consideriamo la prima equazione dell'esercizio 8.

$$x-673=801$$

E' una equazione con il minuendo incognito

Per risolverla, ricordando quanto si è detto nel paragrafo 7.3, è opportuno applicare la proprietà fondamentale della sottrazione.

$$x-673=801 \Rightarrow x=801+673=1474$$

Pertanto l'equazione con il minuendo incognito si risolve eseguendo una operazione di addizione.

- Consideriamo la seconda equazione dell'esercizio 8.

$$8608-y=5231$$

E' una equazione con il sottraendo incognito

Per risolverla, questa volta è opportuno applicare la proprietà del permutare della sottrazione.

si effettua uno scambio

$$8608-y=5231 \Rightarrow 8608-5231=y$$
$$y=8608-5231=3377$$

Pertanto l'equazione con il sottraendo incognito si risolve eseguendo una operazione di sottrazione.

In conclusione, sebbene entrambe le equazioni dello esercizio 8 hanno come operazione diretta soltanto la sottrazione, tuttavia come operazioni inverse ne hanno due differenti:
- l'addizione quando l'incognita è il minuendo;
- la sottrazione quando l'incognita è il sottraendo.

Questa caratteristica è tipica di quelle operazioni che non hanno la proprietà commutativa, per cui incontreremo situazioni analoghe in seguito.

Enunciato

L'equazione con il <u>minuendo</u> incognito ha come operazione diretta la sottrazione e come operazione inversa l'addizione.

In simboli questo tipo di equazione e l'espressione risolvente avranno la forma generale della figura 12 seguente.

$$x-a=b$$
$$x=b+a$$

L'OPERAZIONE INVERSA E' L'ADDIZIONE

fig.12

Enunciato

L'equazione con il <u>sottraendo</u> incognito ha come operazione diretta la sottrazione e come operazione inversa ancora la sottrazione.

In simboli questo tipo di equazione e l'espressione risolvente avranno la forma generale della figura 13 che segue.

$$a-x=b$$

$$x=a-b$$

L'OPERAZIONE INVERSA E' LA SOTTRAZIONE

fig.13

7.5 I numeri 0 ed 1 nella sottrazione

Esercizio 9
Eseguite i calcoli delle seguenti sottrazioni.

67-67= ; 46-0= ; 0-46= ; 0-0= ; 1-0= ;
1-1= ; 16-17= ; 1-13= ; 17-16= ; 13-1=

Per eseguire i calcoli richiesti, considerando che la sottrazione è l'operazione inversa dell'addizione, basta ricorrere alle corrispondenti equazioni.

Cosicché, eseguire la sottrazione 67−67, equivale a risolvere l'equazione: $x+67=67$
Pertanto dobbiamo trovare qual è il numero naturale che addizionato a 67 dà per risultato 67.

Si troverà facilmente che il numero cercato è lo zero.

1) $x+67=67$
$x=67-67=0$

Si può arrivare allo stesso risultato muovendosi sulla semiretta dei naturali.

Procedendo allo stesso modo anche con le altre sottrazioni dell'esercizio, si avranno i seguenti risultati.

2) $y+0=46$
$y=46-0=46$

3) $w+46=0$ impossibile in N, perché l'addendo noto 46 è maggiore della somma 0
$w=0-46=?$ non si può eseguire in N, perché il minuendo 0 è minore del sottraendo 46

4) $z+0=0$
$z=0-0=0$

5) $t+0=1$
$t=1-0=1$

6) $p+1=1$
$p=1-1=0$

7) $q+17=16$ l'equazione è impossibile in N
$q=16-17=?$ la sottrazione non si può eseguire in N

8) $k+13=1$ impossibile in N
$k=1-13=?$ non si può eseguire in N

9) $r+16=17$
$r=17-16=1$

10) $s+1=13$
$s=13-1=12$

Dopo avere svolto l'esercizio, per quanto riguarda il numero 0 nella sottrazione, si faranno le seguenti osservazioni:

- **quando il sottraendo è il numero zero, la differenza è uguale al minuendo:**

$$a-0=a$$

- **quando il minuendo è il numero zero, l'operazione non si può eseguire in N:**

$$0-a=? \quad (a\neq 0)$$

Soltanto nel caso in cui anche il sottraendo è 0 (a=0) questa sottrazione è possibile in N:

$$0-0=0$$

- Lo 0 non è l'elemento neutro per la sottrazione nell'insieme N, perché non è valida la proprietà commutativa:

$$0-a \neq a-0 \quad (a \neq 0)$$

Per quanto riguarda il numero uno, si osserverà che questo, come abbiamo già visto con l'addizione, caratterizza la successione dei numeri naturali.

Cosicché si avrà:

- se il sottraendo è 1, il numero naturale che si ottiene come differenza, è il precedente del numero naturale posto a minuendo;
- se il sottraendo è il precedente del minuendo, il numero naturale che si ottiene come differenza è 1;
- se il minuendo è il numero uno, le uniche sottrazioni che è possibile eseguire in N sono:

  $1-1=0 \quad ; \quad 1-0=1$

  Di conseguenza, l'equazione:

  $1-x=a$ è impossibile in N per $a \neq 1$ e $a \neq 0$

7.6 Espressioni ed equazioni in N

Esercizio 10
Eseguite i calcoli della seguente espressione.

$2131-956-654-41=$

Come abbiamo visto, la sottrazione non ha né la proprietà commutativa né la proprietà associativa, di conseguenza in questa espressione è necessario eseguire i calcoli uno dopo l'altro, nell'ordine in cui si trovano.

$$2131-956-654-41=$$
$$=1175-654-41=$$
$$=521-41=480$$

Esercizio 11
Eseguite i calcoli della seguente espressione.
$34+56-41+78-49-12=$

In questa espressione, in cui ci sono sia addizioni sia sottrazioni, si può procedere in due modi diversi.

a) Si può eseguire ciascuna operazione, una di seguito all'altra, nell'ordine in cui si presenta.

Se si considera che all'operazione di addizione corrisponde uno spostamento a destra sulla semiretta dei naturali e alla sottrazione uno spostamento a sinistra, si può applicare un altro metodo.

b) Si calcola lo spostamento che si deve effettuare complessivamente a destra sulla semiretta dei naturali e quello che si deve effettuare complessivamente a sinistra. La differenza tra questi due risultati parziali darà il valore dell'espressione.

a) $34+56-41+78-49-12=$
$=90-41+78-49-12=$
$=49+78-49-12=$
$=127-49-12=$
$=78-12=66$

b) $34+56-41+78-49-12=$
$=(34+56+78)-(41+49+12)=$
$=168-102=66$

Esercizio 12
Eseguite i calcoli della seguente espressione.
$(23\cdot34-12^2)-\{[(930-13\cdot10)-(21\cdot13+7^3)-37+64]+700-5^4\}=$

Le potenze e le moltiplicazioni hanno la precedenza e si eseguiranno per prime. Rimarranno così soltanto addizioni e sottrazioni, verso le quali si procederà come è stato fatto con gli esercizi 10 e 11 precedenti. Svolgendo i calcoli si dovrà tenere conto anche delle parentesi.

$(23\cdot34-12^2)-\{[(930-13\cdot10)-(21\cdot13+7^3)-37+64]+700-5^4\}=$
$=(782-144)-\{[(930-130)-(273+343)-37+64]+700-625\}=$
$=638-\{[800-616-37+64]+700-625\}=$
$=638-\{[864-653]+700-625\}=$
$=638-\{211+700-625\}=$
$=638-286=352$

Esercizio 13
Risolvete le seguenti equazioni letterali.
$x+m=c$; $n+y=a$

Queste equazioni sono scritte in forma generale, infatti i termini noti sono rappresentati dalle lettere. Di conseguenza anche le espressioni risolventi saranno espresse in forma letterale.

Poiché queste sono equazioni con un addendo incognito, l'operazione inversa per entrambe è la sottrazione.

$$x+m=c \Rightarrow x=c-m \quad ; \quad n+y=a \Rightarrow y=a-n$$

Esercizio 14
Risolvete le seguenti equazioni letterali.
$z-m=c$; $n-w=a$

Anche per queste equazioni le espressioni risolventi avranno una forma letterale.
Poiché l'operazione diretta è la sottrazione, per risolverle è necessario stare attenti al posto occupato da ciascuna incognita.

$z-m=c$ è una equazione con il minuendo incognito;
$z=c+m$ l'operazione inversa è l'addizione.

$n-w=a$ è una equazione col sottraendo incognito;
$w=n-a$ l'operazione inversa è la sottrazione.

7C

OPERAZIONE DI SOTTRAZIONE IN N

Esercizi e Complementi

7.1C Le equazioni in N

Esercizio 15
Calcolate quali numeri naturali si devono sostituire alle incognite, affinché si verifichino le uguaglianze.

a) $40+x=90$; $y+90=120$; $z+1500=3000$; $35+w=80$
b) $x+17=59$; $38+y=73$; $26+z=75$; $w+21=81$
c) $750+w=2107$; $z+2021=3782$; $y+7689=24678$

Esercizio 16
Risolvete le seguenti equazioni.

a) $37+x=100$; $y+24=65$; $91+z=200$; $w+48=77$
b) $x+66=100$; $59+y=98$; $z+31=70$; $48+w=85$
c) $300+y=1000$; $w+573=978$; $3081+x=9733$

Esercizio 17
Rispondete alle seguenti domande.
- Cos'è una uguaglianza?
- Cos'è una equazione?
- Cos'è una incognita?
- Cosa significa risolvere una equazione?
- Cosa significa risolvere una equazione in N?

Esercizio 18
Osservate il riquadro della fig.1, paragrafo 7.1, e spiegate il significato dei simboli.
Di che tipo è l'equazione rappresentata?
Quale operazione è presente a primo membro dell'equazione?

Esercizio 19
Osservate il riquadro della figura 1, paragrafo 7.1, e rispondete alle seguenti domande.
E' possibile che la somma di due numeri naturali sia minore di ciascuno dei suoi addendi?
E' possibile che la somma di due numeri naturali sia un numero uguale ad uno dei suoi addendi?

Esercizio 20
Spiegate cosa significa dire che una equazione non è risolvibile in N.
Osservate la fig.1, paragrafo 7.1, e dite quale condizione si deve porre affinché l'equazione con un addendo incognito sia risolvibile in N.

Esercizio 21
Osservate le seguenti equazioni e dite, senza eseguire i calcoli, quali sono risolvibili in N e quali no.

$x+58=101$; $341+y=319$; $z+5019=1015$; $1767+w=8543$

7.2C L'operazione di sottrazione in N

Esercizio 22
Risolvete le seguenti equazioni con un addendo incognito per tentativi.

$x+87=301$; $361+y=719$; $z+7019=11013$; $7667+w=7743$

Esercizio 23
Risolvete le seguenti equazioni con un addendo incognito, utilizzando la semiretta dei numeri naturali.

$14+x=31$; $y+18=27$; $w+14=18$; $7+z=29$

Esercizio 24
Dite cosa rappresenta l'uguaglianza $m-n=p$.
Qual è il minuendo? quale il sottraendo? quale la differenza?
Quali condizioni si devono porre, affinché questa uguaglianza sia valida in N ?

Esercizio 25
Date la definizione di operazione di sottrazione.
Con quale segno si rappresenta questa operazione?
Come si chiamano i numeri della sottrazione?
Quale relazione c'è tra l'addizione e la sottrazione?

Esercizio 26
**Tra quali numeri si mette il segno meno della sottrazione?
Come si chiama il risultato della sottrazione?
Come si chiama il primo numero della sottrazione? E il secondo numero?**

Anziché dire il primo e il secondo numero della sottrazione è preferibile dire il primo e il secondo termine della sottrazione.
Cosicché nella sottrazione il primo termine è il minuendo e il secondo termine è il sottraendo.

Esercizio 27
**Risolvete le seguenti equazioni con addendo incognito mediante l'algoritmo della sottrazione.
Dopo, sostituendo alle incognite i valori trovati, verificate l'esattezza dei calcoli effettuati.**

a) $3345+x=6111$; $y+167432=210212$; $w+576896=723132$;
b) $2001+z=31011$; $k+75688=110211$; $v+50607=520021$;
c) $p+3045067=4012301$; $s+35612=40010$; $58976+q=60121$

Esercizio 28
**Eseguite le operazioni mediante l'algoritmo di sottrazione.
Verificate poi l'esattezza dei calcoli, eseguendo l'addizione tra la differenza e il sottraendo.**

a) $72345-3845$; $746706-582971$; $198767=11432$;
b) $64053103-7986852$; $433005-346329$; $7012-4211$;
c) $23242-14343$; $809766-299887$; $1243451-458855$

Esercizio 29
Risolvete le seguenti equazioni con addendo incognito usando la calcolatrice.

$x+72345=83201$; $y+546706=902501$; $38762+z=19786$

Esercizio 30
Eseguite le sottrazioni con l'uso della calcolatrice.

$37235-28321$; $7506706-6982501$; $39876-19988$;
$561083-470104$; $701234211-346329776$; $345-400$

7.3C Proprietà della sottrazione

Esercizio 31
Spiegate il significato delle seguenti frasi.
- La semiretta dei naturali è illimitata a destra.
- La semiretta dei naturali è limitata a sinistra.

Esercizio 32
Risolvete le seguenti equazioni, visualizzando sulla semiretta dei naturali il procedimento risolutivo.
Dopo, sostituendo alle incognite i valori trovati, verificate le uguaglianze ottenute.

$28+x=51$; $y+47=33$; $34+z=27$; $w+25=92$

Esercizio 33
Senza eseguire i calcoli dite quali delle sottrazioni seguenti non si possono eseguire in N e perché.

$23-58$; $147-74$; $8123-8132$; $3455-7123$; $34-34$

Esercizio 34
Leggete le seguenti relazioni.

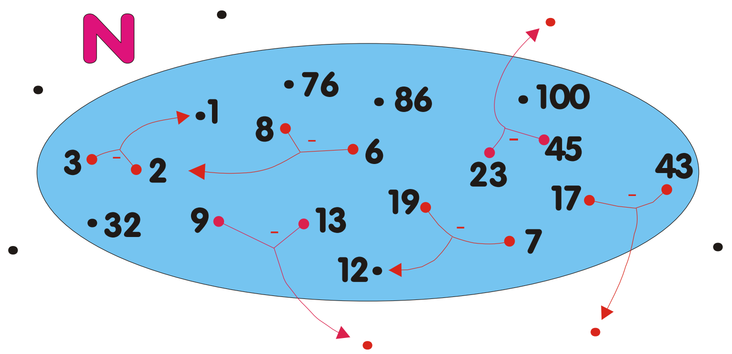
$$b < a \Rightarrow b-a \notin \mathbb{N}$$
$$b \geq a \Rightarrow b-a \in \mathbb{N}$$

Quale risultato si ottiene nel caso in cui $b=a$
Quale condizione si deve porre affinché la sottrazione sia possibile in N ?
Quale condizione si deve porre affinché l'equazione con un addendo incognito sia risolvibile in N ?

Esercizio 35
Spiegate cos'è una legge di composizione interna di N.
L'operazione di sottrazione è una legge di composizione interna di N ?
L'operazione di addizione è una legge di composizione interna di N ?
Quali altre operazioni, tra quelle studiate, sono leggi di composizione interna di N ?
E' corretto dire che l'insieme N è chiuso rispetto alla operazione di sottrazione? e rispetto all'addizione?

Per esprimere che la sottrazione non è un'operazione interna dell'insieme N si può ricorrere all'enunciato e alla figura seguenti.

L'insieme N non è chiuso rispetto all'operazione di sottrazione.



Non è una legge di composizione interna di N

Il grafico mostra che la differenza tra due numeri naturali non sempre si trova all'interno dell'insieme N.

Esercizio 36

Leggete le relazioni e dite se sono vere o false.

se $a;b \in N$ e se $b < a \Rightarrow (a-b) \in N$

se $n;m \in N$ e se $m > n \Rightarrow (n-m) \in N$

Esercizio 37

Verificate quali delle seguenti uguaglianze sono vere. Sapreste spiegare perché alcune di esse sono false?

$134-63=63-134$; $134+63=63+134$; $134 \cdot 63=63 \cdot 134$;
$61327-3201=3201-61327$; $5^3=3^5$; $563-254=254-563$

Esercizio 38

Senza eseguire i calcoli dite quali delle seguenti uguaglianze sono vere e quali quelle false.
Spiegate il motivo delle vostre affermazioni.

$34-23=23-34$; $34+23=23+34$; $34 \cdot 23=23 \cdot 34$
$327-231=231-327$; $9^3=3^9$; $m-n=n-m$

Esercizio 39

E' valida la proprietà commutativa per la sottrazione?
Per quali operazioni, tra quelle studiate, è valida la proprietà commutativa?

Esercizio 40
Verificate quali delle seguenti uguaglianze sono vere.
Sapreste spiegare perché alcune di esse sono false?

$(8014-363)-34=8014-(363-34)$; $11034-2988=9032-986$;
$13\cdot23\cdot50=50\cdot13\cdot23$; $576-123-32=576-32-123$

Esercizio 41
Senza eseguire i calcoli dite quali delle seguenti uguaglianze sono vere e quali quelle false.
Spiegate il motivo delle vostre affermazioni.

$(81-52)-11=81-(52-11)$; $304+23+83=304+83+23$;
$434\cdot23\cdot121=23\cdot121\cdot434$; $(13^4)^6=13^{4^6}$; $23-13-2=23-2-13$

Esercizio 42
E' valida la proprietà associativa per la sottrazione?
Per quali operazioni, tra quelle studiate, è valida?

Esercizio 43
Verificate le seguenti disuguaglianze.

$23-32\neq32-23$; $23+32\neq32+23$; $94-(24+16)\neq(94-24)+16$;
$237-134+45\neq237+45-134$; $237-134-45\neq237-45-134$

Esercizio 44
Senza eseguire i calcoli dite quali delle seguenti uguaglianze sono vere e quali quelle false.
Spiegate il motivo delle vostre affermazioni.

$123-(45-17)=(123-45)-17$; $123+(45+17)=(123+45)+17$
$123\cdot(45\cdot17)=(123\cdot45)\cdot17$; $(m-n)-c=m-(n-c)$

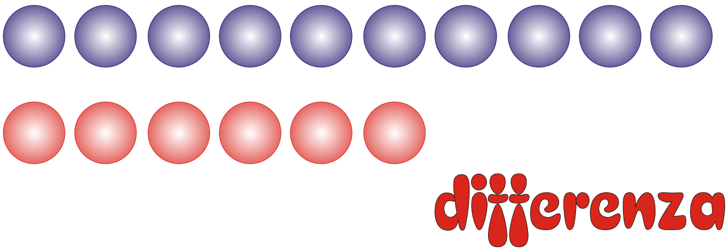
Esercizio 45
Leggete le seguenti disuguaglianze e spiegatele:

$a-b\neq b-a$; $a-(b-c)\neq(a-b)-c$

Sostituendo al segno meno il segno più, le disuguaglianze che si otterranno saranno valide?
E sostituendo il punto della moltiplicazione?
E sostituendo alla sottrazione l'operazione di potenza?

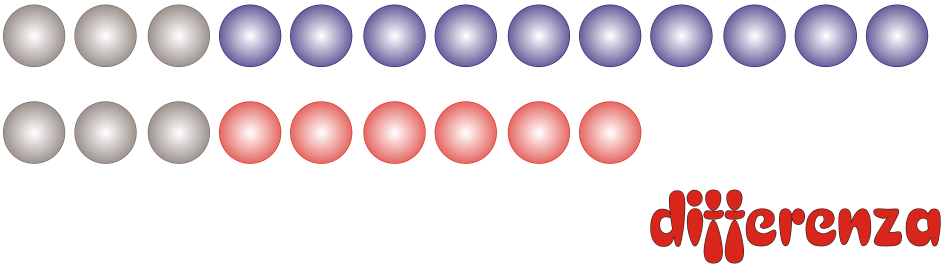
Esercizio 46
Quali analogie si possono riscontrare tra le operazioni di potenza e di sottrazione?

Osservate le figure.
Qual è la differenza tra la quantità di palline che ci sono nella prima fila e la quantità di quelle che ci sono nella seconda fila?



$$\begin{array}{r} 10\ - \\ 6 \\ \hline 4 \end{array}$$

La differenza tra le palline è di 4 unità.
Cosa cambierà se in entrambe le file si aggiungono 3 palline?



$$\begin{array}{r} 13\ - \\ 9 \\ \hline 4 \end{array}$$

La differenza tra le palline della prima fila e quelle della seconda fila è rimasta invariata: è ancora di 4 unità.
Poiché ciò sarebbe successo aggiungendo un qualsiasi numero di palline in entrambe le file, si determina una proprietà della sottrazione: essa prende il nome di proprietà invariantiva.

Si potrà constatare, con un procedimento analogo, che anche nel caso in cui si sottrae uno stesso numero di palline ad entrambe le file la loro differenza rimane invariata.

Proprietà invariantiva della sottrazione

La differenza tra due numeri non varia se si addiziona ad entrambi uno stesso numero.
La proprietà è valida anche se si sottrae ad entrambi uno stesso numero, non maggiore del sottraendo.

Questa proprietà è utile soprattutto quando si vuole eseguire una sottrazione a mente.

Per esempio, si voglia eseguire a mente la sottrazione:

123-37

Addizionando 3, sia al minuendo sia al sottraendo, si otterrà:

126-40

Quest'ultima sottrazione è più facile da eseguire della precedente; la proprietà invariantiva ci assicura che la differenza è la stessa in entrambe.

Esercizio 47
Eseguite a mente le seguenti sottrazioni.
(Applicando la proprietà invariantiva sarà più facile).
567-297= ; 838-207= ; 5007-4009= ; 3034-945=

Esercizio 48
Osservate la figura 8 del paragrafo 7.3 e spiegate cosa rappresenta.

Esercizio 49
Osservate la figura 8 del paragrafo 7.3 e dite se è possibile sostituire ciascuna delle uguaglianze presenti in essa con una delle altre due.
Spiegate il motivo della vostra affermazione.

Esercizio 50
Enunciate la proprietà fondamentale della sottrazione.
Esprimetela in simboli.

Esercizio 51
Enunciate la proprietà del permutare della sottrazione.
Esprimetela in simboli.

Esercizio 52
Osservate la figura 8 del paragrafo 7.3 e dite quale sostituzione si può effettuare tra le uguaglianze in essa presenti per applicare la proprietà fondamentale.

Esercizio 53
Osservate la figura 8 del paragrafo 7.3 e dite quale sostituzione si può effettuare tra le uguaglianze in essa presenti per applicare la proprietà del permutare.

Esercizio 54
Applicate la proprietà fondamentale della sottrazione e verificate le uguaglianze che si ottengono.
74-38=36 ; 434-286=148 ; 2301-1476=825 ; 6403-5914=489

Esercizio 55
Applicate la proprietà del permutare della sottrazione e verificate le uguaglianze che si ottengono.
34-17=17 ; 543-386=157 ; 3001-2146=855 ; 6710-5994=716

Esercizio 56
Applicate la proprietà fondamentale e quella del permutare; verificate poi le uguaglianze ottenute.
87-31=56 ; 843-398=445 ; 4031-3246=785 ; 7670-7599=71

Esercizio 57
Leggete le relazioni delle figure 9 e 10, paragrafo 7.3, ed enunciate le proprietà rappresentate.

7.4C Operazioni dirette e inverse

Esercizio 58
Date la definizione di operazione diretta e di operazione inversa.

Esercizio 59
Dite quante operazioni inverse ha l'operazione di addizione, spiegandone il perché.

Esercizio 60
Dite qual è l'operazione diretta e quale quella inversa nell'equazione con un addendo incognito.
Rappresentate in simboli questo tipo di equazione e la sua espressione risolvente.

Esercizio 61
E' importante il posto in cui compare l'incognita nelle equazioni con un addendo incognito?

Esercizio 62
Dite di che tipo sono le seguenti equazioni.

$59+x=97$; $y+342=806$

Cosa c'è di diverso tra di esse?
Sono differenti le loro operazioni inverse?
Risolvetele.

Esercizio 63
Dite quante operazioni inverse ha l'operazione di sottrazione, spiegandone il perché.

Esercizio 64
Dite di che tipo sono le seguenti equazioni.

$x-159=397$; $807-y=531$

Cosa c'è di diverso tra di esse?
Sono differenti le loro operazioni inverse?
Risolvetele.

Esercizio 65
Dite quali sono le operazioni dirette e quali le inverse nelle equazioni in cui sull'incognita influisce la sottrazione.
Rappresentate in simboli questi tipi di equazioni e le loro espressioni risolventi.

Esercizio 66
Quando l'operazione diretta è la sottrazione, è importante il posto in cui compare l'incognita? Perché?
Quali sono le operazioni inverse?

Esercizio 67
Dite di che tipo sono le seguenti equazioni.

$z+7006=30322$; $x-615=397$; $787-y=651$; $454+w=887$

Quali sono le loro operazioni dirette? e quali le loro operazioni inverse?
Risolvetele.

Esercizio 68
Rappresentate in simboli l'equazione col minuendo incognito e la sua espressione risolvente.

Esercizio 69
Rappresentate in simboli l'equazione col sottraendo incognito e la sua espressione risolvente.

Esercizio 70
Qual é l'operazione diretta nelle equazioni con il minuendo incognito? e quale quella inversa?

Esercizio 71
Qual é l'operazione diretta nelle equazioni con il sottraendo incognito? e quale quella inversa?

Esercizio 72
Con quale operazione si risolvono le equazioni con un addendo incognito?
Con quale operazione si risolvono le equazioni con il minuendo incognito?
Con quale operazione si risolvono le equazioni con il sottraendo incognito?

Esercizio 73
Quante operazioni inverse ha l'addizione?
Quante operazioni inverse ha la sottrazione?

7.5C I numeri 0 e 1 nella sottrazione

Esercizio 74
Eseguite i calcoli delle seguenti sottrazioni.
38-38= ; 35-0= ; 0-35= ; 0-0= ; 1-0= ;
0-1= ; 34-33= ; 33-34= ; 1-13= ; 13-1=

Esercizio 75
Qual è la differenza tra due numeri naturali nel caso in cui il primo termine è il consecutivo del secondo?
Qual è la differenza nel caso in cui il sottraendo è 0?
Qual è la differenza nel caso in cui il sottraendo è 1?
In quale caso è possibile eseguire la sottrazione che ha il minuendo 0 ?

Esercizio 76
Risolvete le seguenti equazioni.
$x+0=28$; $0+y=41$; $1+z=65$; $w+0=0$; $k+201=202$;
$133+t=1$; $634+p=0$; $q+1=1$

Esercizio 77
Risolvete le seguenti equazioni.
$x-0=528$; $0-y=401$; $1-z=15$; $w-0=0$; $k-72=71$;
$133-t=1$; $531-p=0$; $q-1=10$

Esercizio 78
Esiste l'elemento neutro della sottrazione nell'insieme N dei naturali?
Per quali operazioni esiste l'elemento neutro? qual è in ciascuna di queste?

Esercizio 79
Dite quali delle seguenti uguaglianze sono vere.
$1+a=a$; $1-a=a$; $0+c=c$; $0-b=0$; $1\cdot a=a$; $0\cdot b=b$;
$m-0=m$; $m-1=m$; $a^0=1$; $a^1=a$; $1^a=1$; $0^a=0$

Esercizio 80
Dite quali delle seguenti uguaglianze sono vere.
$1+a=a+1$; $0+a=a+0$; $1-a=a-1$; $0-a=a-0$; $0\cdot m=m\cdot 0$;
$1\cdot m=m\cdot 1$; $a^0=0^a$; $a^1=1^a$

Esercizio 81
Quali analogie ci sono tra la potenza e la sottrazione riguardo all'elemento neutro? E quali differenze?

Nelle sottrazioni Il numero 0 non influisce nei calcoli quando è il sottraendo; la differenza che si ottiene è uguale al minuendo.
Tuttavia esso non è l'elemento neutro per la sottrazione nell'insieme N, perché in questa operazione non c'è la proprietà commutativa.

Infatti: $a-0=a$ **ma** $0-a\neq a$ $(a\neq 0)$

Questa caratteristica si esprime col seguente enunciato:

Il numero 0 è l'elemento neutro destro della sottrazione nell'insieme N.

7.6C Espressioni ed equazioni in N

Esercizio 82
Eseguite i calcoli delle seguenti espressioni.

a) $3431-975-454-41=$

b) $34567-10225-5003-3457-456=$

c) $7066032-5189965-755623-370312=$

Esercizio 83
Eseguite i calcoli delle seguenti espressioni.

a) $45-12+31-27-8=$ [29]

b) $603-431+937-864+501=$ [746]

c) $5134-4025-1504+457+225=$ [287]

Esercizio 84
Eseguite i calcoli delle seguenti espressioni.

a) $345-12\cdot7+3\cdot15-27\cdot5-8\cdot9=$ [99]

b) $60\cdot13-4\cdot31+9\cdot37-26\cdot4+501-1006=$ [380]

c) $5^2+3^4-7^2+15\cdot4^3-45\cdot7-525-107=$ [70]

Esercizio 85
Eseguite i calcoli delle seguenti espressioni.

a) $735-(14\cdot6+23\cdot11-27\cdot5)-18\cdot19=$ [191]

b) $26\cdot5^4-(34+3^3\cdot31-29\cdot23+26\cdot2^5)-(10051-10\cdot36)=$ [5523]

c) $(17\cdot6^3-8^2\cdot16)-(6^2+3^4)-(185\cdot6-525-107)-1895=$ [158]

Esercizio 86
Eseguite i calcoli delle seguenti espressioni.

a) $[(8+67\cdot54-12^2)+18453-(4^4\cdot91-28\cdot11^2-27\cdot5)]-38\cdot49=$ [300]

b) $41-\{5^2-[(37+3^5\cdot31-32\cdot53)-(1051-14\cdot36)-5304]\}=$ [39]

c) $77\cdot(740-12\cdot54)-\{466-[67-(345-286)]-458\}-7082=$ [2]

Esercizio 87
Eseguite i calcoli delle seguenti espressioni.

a) $\{[(228-13^2-57)+(3^5+401-628)]+38\cdot74-2798\}-32=$ [0]

b) $\{[59\cdot31-(35\cdot21-9^2\cdot7)+21^2-32\cdot53]-336\}-(851-34\cdot23)=$ [1]

c) $\{33\cdot6^4-[(29+3^3\cdot4^4-6899)+75]-10^6\}+(82-10^2)=$ [imp]

Esercizio 88
Eseguite i calcoli delle seguenti espressioni.

a) $\{[(600-17^2-257)+(701-648)-100]^4-63\cdot 27-698\}^5-32=$ [0]

b) $(359+231-578)^3-1637-\{[231-(98-8^2)]+25^2-819\}^4=$ [10]

c) $10^5-9\cdot 5^4-(79+5^3\cdot 4^4-99)+\{123-[555-(34+22\cdot 19)]-19\}^6=$ [62396]

Esercizio 89
Risolvete le seguenti equazioni.

$x+563=711$; $17987+y=18666$; $w-6776=7667$; $878-z=666$

$k+12301=12421$; $v-7077=6066$; $45554-t=54445$

Esercizio 90
Risolvete le seguenti equazioni letterali.

$x+a=b$; $c+y=m$; $w-d=q$; $g-z=g$

Esercizio 91
Risolvete le seguenti equazioni.

$x+1093=3002$; $y-27053=528$; $3799-w=588$; $237+z=100$

Esercizio 92
Risolvete le seguenti equazioni.

$x-3672=3672$; $452-y=452$; $7528-w=1$; $z-837=1$

Esercizio 93
Risolvete le seguenti equazioni.

$5071-x=5050$; $13575+y=55895$; $z-137=1091$; $764-w=504$


Sei cocciuto come un mulo.
Ti dico e ti ripeto di no!
Non contraddirmi!
Zero meno uno fa zero!

L'operazione di divisione

8

8.1 Le equazioni in N

Esercizio 1
Calcolate quale numero naturale si deve sostituire alla lettera x affinché si verifichi la seguente uguaglianza.

$$x \cdot 17 = 391$$

Nell'uguaglianza dell'esercizio con la lettera x si è indicato un numero incognito, cioè un numero di cui non si conosce il valore.

Per risolvere l'equazione si può procedere per tentativi. Sostituendo all'incognita x un numero naturale a piacere, si faccia la verifica dell'uguaglianza ottenuta. Si ponga, ad esempio, 10 al suo posto. Si otterrà l'uguaglianza:

$$10 \cdot 17 = 391$$

Ma, eseguendo i calcoli, essa non risulta vera:

$$10 \cdot 17 \neq 391$$

Pertanto: $x \neq 10$

Stabilito anche che l'incognita ha un valore maggiore:

$$x > 10$$

si sostituisca con un numero più grande, ad esempio il 50. Ma neanche questa volta l'uguaglianza è vera:

$$50 \cdot 17 \neq 391$$

Si constaterà infatti che la **x** ha un valore minore:

$$x < 50$$

Pertanto l'incognita è compresa tra 10 e 50:

$$10 < x < 50$$

Scegliendo un numero naturale maggiore di 10 e minore di 50 si continuerà con la verifica.
Proseguendo in questo modo, l'intervallo in cui cercare il valore dell'incognita si restringerà sempre più, fintantoché, alla fine, si troverà che essa vale 23:

$$x=23$$

Infatti, sostituendo nell'equazione questo numero, la uguaglianza che si ottiene risulta vera:

$$23 \cdot 17=391$$

Esercizio 2
Risolvete la seguente equazione.

$29 \cdot y=232$

Procedendo per tentativi, così come abbiamo fatto con il precedente esercizio, si troverà con facilità il valore dell'incognita:

$$y=8$$

Infatti, sostituendo alla **y** dell'equazione il numero 8, l'uguaglianza che si ottiene è vera.

$$29 \cdot 8=232$$

Attenzione a stabilire esattamente quali sono le operazioni che influiscono sulle incognite.
Nelle equazioni degli esercizi 1 e 2 le due incognite **x** ed **y** sono dei fattori, perché, a primo membro di ciascuna di esse, c'è il segno • della moltiplicazione.

Se mettiamo le lettere al posto dei numeri, le equazioni con un fattore incognito avranno la forma generale rappresentata nel riquadro della figura 1 seguente.

$$x \cdot a = b$$

$$a, b \in N$$

EQUAZIONE IN N CON FATTORE INCOGNITO

fig.1

Esercizio 3
Osservate il riquadro della fig.1 e spiegate il significato dei simboli.

Facendo le dovute osservazioni, sarà opportuno rilevare che:

- **Questa uguaglianza è una equazione, perché c'è una incognita a primo membro.**
- **L'incognita x è un fattore, perché accanto ad essa c'è il segno • della moltiplicazione.**
- **Il simbolo di appartenenza ∈ specifica che l'addendo noto a e la somma b rappresentano due numeri naturali.**

Si badi bene che non è sufficiente che i termini noti a,b dell'equazione siano entrambi numeri naturali per potere concludere che il termine incognito x sia anch'esso un numero naturale.

Infatti, affinché l'equazione con un fattore incognito sia risolvibile in N, è necessaria la condizione che il prodotto b sia multiplo del fattore noto a.

$$a \cdot x = b \qquad a, b \in N$$

$$\text{se} \quad b \text{ è multiplo di } a \Rightarrow x \in N$$

8.2 L’operazione di divisione in N

Esercizio 4
Risolvete la seguente equazione.
$15 \cdot x = 195$

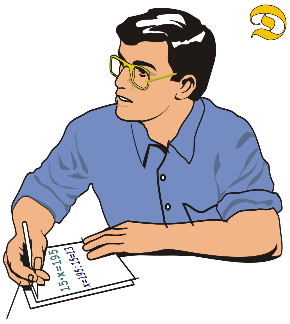
Seguendo la procedura per tentativi, così come è stato fatto per gli esercizi del paragrafo precedente, si arriverà alla conclusione che l'incognita vale 13:

$$15 \cdot 13 = 195 \quad \Rightarrow \quad x = 13$$

Adesso però dobbiamo trovare un metodo che ci consenta di eseguire i calcoli in modo più rapido.
A questo fine ricordiamo come abbiamo fatto per calcolare il prodotto di due fattori nel paragrafo 5.1.

Per risolvere le equazioni con un fattore incognito anche questa volta ci serviremo della tavola pitagorica.

Utilizzando la tavola della figura 2 seguente, procediamo in senso inverso a quello seguito per moltiplicare.
Scorriamo la colonna 15, indicata dal fattore noto, fino ad incontrare il numero 195, indicato dal prodotto.
Questo numero si trova all'incrocio della colonna del termine noto con il rigo del termine incognito. Pertanto, scorrendo verso sinistra il rigo in cui si trova il numero 195, alla sua estremità si leggerà il valore del fattore incognito, cioè 13.



Definizioni

- Il procedimento usato per risolvere le equazioni con un fattore incognito si dice **operazione di divisione**.
- Il primo numero della divisione si dice **dividendo**, il secondo numero si dice **divisore** e il risultato **quoto**.
- L’operazione di divisione si indica ponendo il segno **:** tra il dividendo e il divisore.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	112	119	126	133	140
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	128	136	144	152	160
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153	162	171	180
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165	176	187	198	209	220
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180	192	204	216	228	240
13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195	208	221	234	247	260
14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210	224	238	252	266	280
15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180	195	210	225	240	255	270	285	300
16	32	48	64	80	96	112	128	144	160	176	192	208	224	240	256	272	288	304	320
17	34	51	68	85	102	119	136	153	170	187	204	221	238	255	272	289	306	323	340
18	36	54	72	90	108	126	144	162	180	198	216	234	252	270	288	306	324	342	360
19	38	57	76	95	114	133	152	171	190	209	228	247	266	285	304	323	342	361	380
20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300	320	340	360	380	400

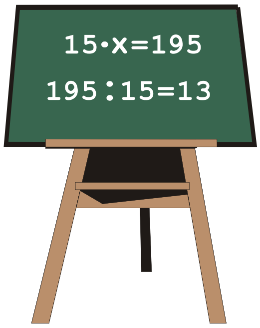


fig.2

Pertanto, risolvere l'equazione dell'esercizio 4 equivale ad eseguire una operazione di divisione tra il prodotto 195 e il fattore noto 15.
La corrispondente scrittura simbolica è la seguente.

$15 \cdot x = 195$
$x = 195 : 15 = 13$

dividendo divisore quoto

195 : 15 = 13

Sostituendo le lettere ai numeri la divisione assumerà la forma generale della figura 3 seguente.

$a : b = c$

a multiplo b

$a, b, c \in \mathbb{N}$

Operazione di divisione in N

fig.3

Se i calcoli da eseguire per ricavare il quoto tra due numeri non sono immediati, si ricorrerà al già noto algoritmo di divisione oppure all'uso della calcolatrice.

Esercizio 5
Risolvete le seguenti equazioni con un fattore incognito.

$x \cdot 13 = 117$; $19 \cdot y = 323$; $z \cdot 34 = 2414$; $1003 \cdot w = 15045$

- Risolvere le prime due equazioni è abbastanza facile.
Si può visualizzare il quoto delle divisioni utilizzando la tavola pitagorica della figura 2.

$x = 117 : 13 = 9$; $y = 323 : 19 = 17$

- Per risolvere le altre due equazioni è invece necessario eseguire l'algoritmo di divisione. Tuttavia è preferibile fare i calcoli con l'uso di una calcolatrice, allo scopo di arrivare rapidamente al risultato ed evitare di perdere il filo del discorso.

$z = 2414 : 34 = 71$

$w = 15045 : 1003 = 15$

```
2414 | 34
238  | 71
0034 |
  34 |
  00 |
```

```
15045 | 1003
1003  | 15
05015 |
 5015 |
 0000 |
```

In questi casi è bene accertarsi di avere eseguito i calcoli in modo corretto: basta verificare l'uguaglianza che si ottiene sostituendo il quoto trovato all'incognita della corrispondente equazione .
Facendo ciò si effettua quella che comunemente viene detta prova della divisione.

8.3 Proprietà della divisione

Esercizio 6
Rivedete le proprietà della moltiplicazione e stabilite se sono valide anche per la divisione.

- Verifichiamo se è valida la legge di composizione interna.

Dobbiamo stabilire se esiste il quoto tra due qualsiasi numeri naturali.
A questo fine eseguiamo l'esercizio seguente.

Esercizio 6.1
Risolvete la seguente equazione.
$x \cdot 9 = 67$

Nel paragrafo 8.1 si è stabilito che una equazione di questo tipo è risolvibile in N soltanto se il prodotto è un multiplo del fattore noto.
Elencando i multipli del 9, e non trovando tra di essi il numero 67, si constaterà che non esiste alcun numero naturale che moltiplicato per 9 dà per risultato 67.
Pertanto l'equazione non è risolvibile in N.

Visualizziamo il calcolo, utilizzando la tavola pitagorica della figura 2, paragrafo 8.2.
Scorrendo la colonna 9 ci si accorgerà che in essa il numero 67 non c'è.
Infatti, dopo il 63, che è minore, si passa al multiplo successivo 72, che è maggiore.
Cosicché questa divisione non si può eseguire in N.

$x \cdot 9 = 67$	**L'equazione non è risolvibile in N.**
$x = 67 : 9 = ?$	**La divisione non si può eseguire in N.**

Si osservi il riquadro della figura 3, paragrafo 8.2.
Adesso si comprenderà meglio perché, nel rappresentare l'operazione di divisione in N, si è posta la condizione: "a multiplo di b".

Soltanto se si verifica questa condizione il quoto tra due numeri naturali è ancora un numero naturale.

Constatato che non sempre si può eseguire la divisione tra due qualsiasi numeri naturali, si esprimerà il seguente

enunciato

L'operazione di divisione non è una legge di composizione interna di N.

Definizioni

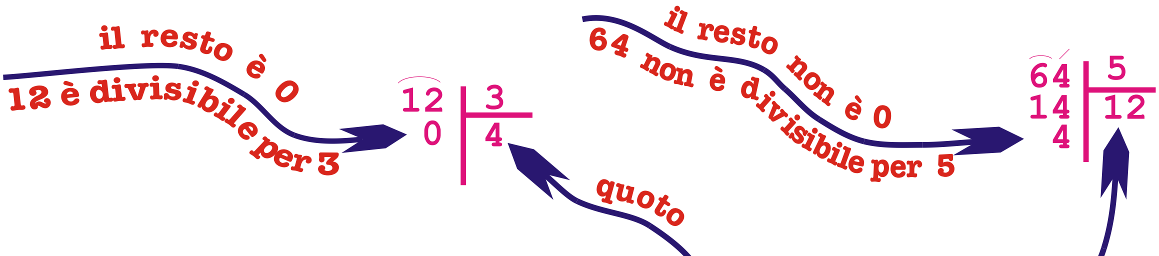
- **Quando la divisione tra due numeri naturali si può eseguire in N, si dice che il dividendo è divisibile per il divisore.**
- **Quando la divisione non si può eseguire in N, si dice che il dividendo non è divisibile per il divisore.**

cosicché,

12 :3=4	**64 :5= ?**
12 è divisibile per 3	**64 non è divisibile per 5**

Quando si fa uso dell'algoritmo di divisione si hanno le seguenti situazioni:

- **se il dividendo è divisibile per il divisore, il resto della divisione è 0;**
- **se il dividendo non è divisibile per il divisore, il resto della divisione è diverso da 0.**



Se il resto della divisione è diverso da zero, si ottiene un risultato approssimato che prende il nome di quoziente.

- Verifichiamo se è valida la proprietà commutativa.

A questo fine svolgiamo l'esercizio seguente.

Esercizio 6.2
Stabilite se la seguente uguaglianza è vera o falsa.
72:18=18:72

Eseguiamo i calcoli a primo membro:

72:18=4

Eseguiamo i calcoli a secondo membro:

18:72= ? *questa divisione non si può eseguire in N*

Come si può notare i due risultati sono differenti, per cui l'uguaglianza non è vera:

$$72:18 \neq 18:72$$

Si osservi che questa disuguaglianza vale in generale, per una qualsiasi altra coppia di numeri naturali.
Quindi, poiché il risultato della divisione cambia, se si muta l'ordine dei suoi termini, possiamo esprimere il seguente

enunciato

L'operazione di divisione non ha la proprietà commutativa.

$$\boxed{b:a \neq a:b}$$

fig.4

- Verifichiamo se è valida la proprietà associativa.

Esercizio 6.3
Stabilite se la seguente uguaglianza è vera o falsa.
(753571:91):7=753571:(91:7)

Eseguiamo i calcoli a primo membro:

(753571:91):7=
=8281:7=1183

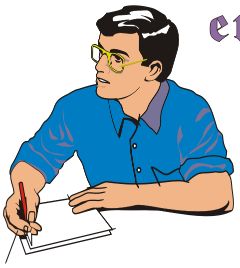
Eseguiamo i calcoli a secondo membro:

753571:(91:7)=
=753571:13=57967

I risultati sono diversi, quindi l'uguaglianza è falsa:

$$(753571:91):7 \neq 753571:(91:7)$$

Si osservi che questa disuguaglianza vale in generale, per una qualsiasi altra terna di numeri naturali.
Quindi, se si associano i suoi termini in modo differente, i risultati delle divisioni cambiano, per cui possiamo esprimere il seguente



enunciato

L'operazione di divisione non ha la proprietà associativa.

$$\boxed{(a:b):c \neq a:(b:c)}$$

fig.5

Come si è potuto constatare finora, tra le operazioni di divisione e di sottrazione ci sono molte analogie.
Ci sono altre analogie che sarebbe bene trovare da sé, in modo da anticipare le conclusioni descritte di seguito.

Si osservi la figura 6 seguente.

Le tre uguaglianze rappresentate esprimono la connessione esistente fra la moltiplicazione e la divisione.

$$\boxed{a=b\cdot c \qquad a:c=b \qquad a:b=c}$$

fig.6

Infatti, come si è stabilito risolvendo le equazioni, per ottenere il valore di uno dei due fattori si deve eseguire l'operazione di divisione tra il prodotto e l'altro fattore:

$$b\cdot c=a \quad \Rightarrow \quad b=a:c \quad ; \quad c=a:b$$

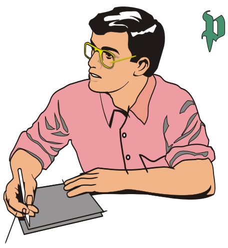
Dal momento che sono equivalenti, sarà possibile sostituire ad ognuna delle uguaglianze della figura 6 una delle altre due, ogni qualvolta lo riterremo opportuno.

Si potranno fare, ad esempio, le seguenti sostituzioni:

$$a:c=b \xrightarrow{\text{con}} a=b\cdot c$$

$$a:b=c \xrightarrow{\text{con}} a=c\cdot b$$

Entrambe le sostituzioni effettuate caratterizzano la



proprietà fondamentale della divisione

In ogni divisione il dividendo è uguale al prodotto del quoto per il divisore.

In simboli questa proprietà sarà espressa dalla conseguenza logica della figura 7.

$$a:b=c \Rightarrow a=c\cdot b$$

Proprietà fondamentale della divisione

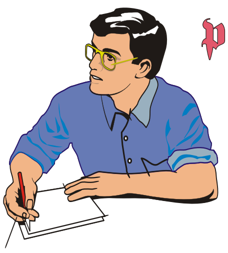
fig.7

Altre sostituzioni nelle uguaglianze della figura 6 potranno essere fatte nel seguente modo:

$$a:c=b \xrightarrow{\text{con}} a:b=c$$

$$a:b=c \xrightarrow{\text{con}} a:c=b$$

Entrambe le sostituzioni caratterizzano la



proprietà del permutare della divisione

Se in una divisione si permuta il quoto con il divisore si mantiene l'uguaglianza.

Con l'uso delle lettere questa proprietà sarà espressa in forma generale, così come è mostrato nella figura 8.
(⇒ è il simbolo di conseguenza logica).

$$a:b=c \;\Rightarrow\; a:c=b$$

Proprietà del permutare della divisione

fig.8

8.4 Operazioni dirette e inverse

Esercizio 7
Risolvete le seguenti equazioni.
$16 \cdot x=288$; $y \cdot 51=37281$

Nel paragrafo 8.2 abbiamo affrontato il problema delle equazioni con un fattore incognito e abbiamo stabilito che l'operazione con cui esse si risolvono è la divisione.
Adesso è opportuno sottolineare che, in questo tipo di equazione, l'incognita può comparire a primo posto o a secondo posto, senza che muti l'operazione risolvente.
Ciò è dovuto al fatto che per l'operazione di moltiplicazione vale la proprietà commutativa:

$$x \cdot a=a \cdot x$$

Svolgiamo l'esercizio 7:

$16 \cdot x=288$	$y \cdot 51=37281$
$x=288:16=18$	$y=37281:51=731$

Per risolvere entrambe si è eseguita la stessa operazione: la divisione.

Riflettendo sullo svolgimento di questo esercizio e ricordando le definizioni date nel paragrafo 7.4, concluderemo con il seguente

enunciato

L'equazione con un fattore incognito ha come operazione diretta la moltiplicazione e come operazione inversa la divisione.

In simboli questo tipo di equazione e l'espressione risolvente avranno la forma generale della figura 9 seguente.

$$x \cdot a = b$$

$$x = b : a$$

LA MOLTIPLICAZIONE HA UNA OPERAZIONE INVERSA SOLTANTO: LA DIVISIONE

fig.9

Esercizio 8

Risolvete le seguenti equazioni.

$x:73=81$; $15477:y=231$

Osserviamo queste due equazioni: in entrambe l'operazione che influisce sull'incognita è la divisione, la quale assume il ruolo di operazione diretta.

Questa volta, contrariamente al caso in cui l'operazione in considerazione è la moltiplicazione, si deve stare attenti al posto occupato dall'incognita, perché la divisione non ha la proprietà commutativa.

Infatti vale la disuguaglianza:

$$a:x \neq x:a$$

Cosicché, quando l'operazione diretta è la divisione, è necessario distinguere le equazioni con il dividendo incognito dalle equazioni con il divisore incognito.

- Consideriamo la prima equazione dell'esercizio 8.

$$x:73=81$$

E' una equazione con il dividendo incognito

Per risolverla, ricordando quanto si è detto sulle uguaglianze delle figure 6 e 7, paragrafo 8.3, è necessario applicare la proprietà fondamentale della divisione.

$$x:73=81 \Rightarrow x=81 \cdot 73=5913$$

Pertanto l'equazione con il dividendo incognito si risolve eseguendo una operazione di moltiplicazione.

- Consideriamo la seconda equazione dell'esercizio 8.

$$15477:y=231$$

E' una equazione con il divisore incognito

Per risolverla, ricordando le uguaglianze delle figure 6 e 8, paragrafo 8.3, questa volta è necessario applicare la proprietà del permutare della divisione.

si effettua uno scambio

$$15477:y=231 \Rightarrow 15477:231=y$$

$$y=15477:231=67$$

Pertanto l'equazione con il divisore incognito si risolve eseguendo una operazione di divisione.

In conclusione, sebbene entrambe le equazioni dell' esercizio 8 hanno come operazioni dirette solo la divisione, tuttavia come operazioni inverse ne hanno due differenti :
- la moltiplicazione quando l'incognita è il dividendo;
- la divisione quando l'incognita è il divisore.

Enunciato

L'equazione con il dividendo incognito ha come operazione diretta la divisione e come operazione inversa la moltiplicazione.

In simboli questo tipo di equazione e l'espressione risolvente avranno la forma generale della figura 10.

$$x : a = b$$

$$x = b \cdot a$$

L'OPERAZIONE INVERSA E' LA MOLTIPLICAZIONE

fig.10

Enunciato

L'equazione con il divisore incognito ha come operazione diretta la divisione e come operazione inversa ancora la divisione.

In simboli questo tipo di equazione e l'espressione risolvente avranno la forma generale della figura 11.

$$a : x = b$$

$$x = a : b$$

L'OPERAZIONE INVERSA E' LA DIVISIONE

fig.11

8.5 I numeri 0 ed 1 nella divisione

Esercizio 9
Eseguite i calcoli delle seguenti divisioni.

$7:0=$; $0:7=$; $0:a=$; $a:0=$; $0:0=$;
$13:1=$; $a:1=$; $1:13=$; $1:a=$; $1:1=$

Ricordando che la divisione è l'operazione inversa della moltiplicazione, per eseguire i calcoli dell'esercizio, ci avvarremo delle corrispondenti equazioni.
Infatti eseguire la divisione 7:0 equivale a risolvere l'equazione: $x \cdot 0=7$.
Come abbiamo già stabilito, affinché questa equazione sia risolvibile in N, il prodotto 7 deve essere multiplo di 0.

Ma quali sono i multipli di 0 ?

Per rispondere a questa domanda dobbiamo ricordare la definizione di multiplo, enunciata alla fine del paragrafo 5.1, e la legge di annullamento del prodotto, figura 8 del paragrafo 5.4.

Poiché la moltiplicazione di ciascun numero naturale per 0 dà come prodotto 0, si perverrà a queste conclusioni:

- L'unico multiplo di 0 è lo stesso 0, ma ripetuto infinite volte.
- Ogni numero naturale ha tra i suoi multipli lo 0.

Detto ciò, aggiungiamo alla tavola pitagorica i multipli di zero, cioè un rigo di zeri, e i multipli 0 di ciascun numero, cioè una colonna di zeri.

Si veda la tavola pitagorica della figura 12 seguente.

Da essa risulta chiaramente che il 7 non è multiplo di 0: non esiste alcun numero che moltiplicato per 0 dà per risultato 7, perché l'unico multiplo di 0 è lo stesso 0.

Concludendo, diremo:

1) l'equazione $x \cdot 0=7$ è impossibile
la divisione $7:0=?$ non si può eseguire

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
0	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

fig.12

- Eseguiamo la divisione 0:7.
L'equazione corrispondente è: $x \cdot 7=0$
Osservando la tavola pitagorica di figura 12 e scorrendo la colonna dei multipli di 7, troviamo il numero 0.
Questo si trova all'incrocio col rigo dei multipli di 0, per cui il fattore incognito cercato è il numero 0.

2) $0 \cdot 7=0 \Rightarrow 0:7=0$

- E' immediato dedurre che questo risultato non cambia se si sostituisce al 7 un qualunque altro numero naturale, diverso da zero.
Pertanto si può scrivere in forma generale:

3) $\mathbf{0:a=0 \quad (a \neq 0)}$

- Analogamente, per quanto si è detto a proposito della divisione 7:0, si avrà quest'altra forma generale:

4) $\mathbf{a:0=? \quad (a \neq 0)}$ **non si può eseguire**

- Eseguiamo la divisione 0:0.
L'equazione corrispondente è $x \cdot 0=0$.
Scorrendo la colonna dei multipli di 0, troviamo il numero 0 ripetuto indefinitamente.
Cosicché la colonna dei multipli di zero si può incrociare indifferentemente con il rigo dei multipli di un numero naturale qualsiasi.
Ciò vuol dire che sostituendo all'incognita dell'equazione $x \cdot 0=0$ uno qualunque dei numeri naturali, l'uguaglianza che si ottiene è sempre vera.

Esprimeremo i concetti dedotti nel modo seguente.

5) $0:0=?$ questa divisione è indeterminata, perché l'equazione $x \cdot 0=0$ ha infinite soluzioni.

- Eseguiamo la divisione 13:1
L'equazione corrispondente è: $x \cdot 1=13$
Dobbiamo cercare il numero 13 tra i multipli di 1.
Ma quali sono i multipli di 1?
In accordo con la definizione di multiplo e con la figura 9, paragrafo 5.4, dedurremo che:

- ciascun numero naturale è multiplo di 1;
- 1 è multiplo solo di sé stesso.

Scorriamo la seconda colonna della tavola pitagorica della figura 12 e, prolungandola, arriviamo al 13.
Questo numero si trova all'incrocio della colonna dei multipli di 1 con il rigo dei multipli di 13.
Pertanto il fattore incognito cercato è il numero 13.

6) $13 \cdot 1=13 \quad \Rightarrow \quad 13:1=13$

Questo risultato si può generalizzare mettendo al posto del 13 un qualsiasi altro numero, per cui si avrà:

7) $\mathbf{a:1=a}$

- Eseguiamo la divisione 1:13
L'equazione corrispondente è: $x \cdot 13=1$
Poiché 1 non è multiplo di 13, concluderemo che:

8) $x \cdot 13=1$ **non si può risolvere in N**
$1:13=?$ **non si può eseguire in N**

Questo risultato si può generalizzare mettendo al posto di 13 un qualsiasi altro numero diverso da 1 e da 0:

9) $\mathbf{1:a=?}$ $\mathbf{(a \neq 1{,}0)}$ **non si può eseguire in N**

- Eseguiamo la divisione 1:1
L'equazione corrispondente è: $x \cdot 1=1$
Cercando il numero 1 tra i multipli di 1, lo troviamo all'incrocio della colonna dei multipli di 1 con il rigo dei multipli di 1.
Quindi il fattore incognito cercato è il numero 1.

10) $1 \cdot 1=1 \quad \Rightarrow \quad 1:1=1$

8.6 Espressioni ed equazioni in N

Esercizio 10

Eseguite i calcoli delle seguenti espressioni.

$12\cdot34:2=$; $35:5\cdot8=$; $52-68:4=$; $9+4^3:16=$;

$8^4-26\cdot\{4\cdot[(17+3\cdot7^3):2+6^2\cdot10:12+75:15\cdot7]-13^3\}=$

In queste espressioni si devono eseguire:
- prima le potenze;
- poi le moltiplicazioni e le divisioni, nell'ordine in cui si trovano;
- infine le addizioni e le sottrazioni, nell'ordine in cui si trovano.

1) $12\cdot34:2=408:2=204$

2) $35:5\cdot8=7\cdot8=56$

3) $52-68:4=52-17=35$

4) $9+4^3:16=9+64:16=9+4=13$

5) $8^4-26\cdot\{4\cdot[(17+3\cdot7^3):2+6^2\cdot10:12+75:15\cdot7]-13^3\}=$

$=4096-26\cdot\{4\cdot[(17+3\cdot343):2+36\cdot10:12+75:15\cdot7]-2197\}=$

$=4096-26\cdot\{4\cdot[(17+1029):2+360:12+5\cdot7]-2197\}=$

$=4096-26\cdot\{4\cdot[1046:2+30+35]-2197\}=$

$=4096-26\cdot\{4\cdot[523+30+35]-2197\}=$

$=4096-26\cdot\{4\cdot588-2197\}=$

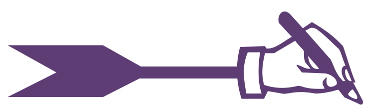
$=4096-26\cdot\{2352-2197\}=$

$=4096-26\cdot155=$

$=4096-4030=66$

Per distinguere bene il divisore dal dividendo, così da stabilire l'ordine di esecuzione delle operazioni in modo più semplice, è preferibile sostituire al segno di divisione una linea di frazione.
In questo caso il divisore si scrive sopra la linea di frazione e prende il nome di numeratore; il dividendo si scrive sotto la linea di frazione e prende il nome di denominatore.

a:b



$\frac{a}{b}$

a ← numeratore
— ← linea di frazione
b ← denominatore

Esercizio 10/b
Rifate l'esercizio 10, trasformando le divisioni in forma di frazioni.

1) $\dfrac{12\cdot 34}{2}=\dfrac{408}{2}=204$

2) $\dfrac{35}{5}\cdot 8=7\cdot 8=56$

3) $52-\dfrac{68}{4}=52-17=35$

4) $9+\dfrac{4^3}{16}=9+\dfrac{64}{16}=9+4=13$

5) $8^4-26\cdot\left\{4\cdot\left[\dfrac{17+3\cdot 7^3}{2}+\dfrac{6^2\cdot 10}{12}+\dfrac{75}{15}\cdot 7\right]-13^3\right\}=$

$=4096-26\cdot\left\{4\cdot\left[\dfrac{1046}{2}+\dfrac{360}{12}+5\cdot 7\right]-2197\right\}=$

$=4096-26\cdot\{4\cdot[523+30+35]-2197\}=$

$=4096-26\cdot 155=66$

Esercizio 11
Risolvete le seguenti equazioni.

$21+12\cdot x=177$; $y\cdot 35-345=250$; $923-23\cdot z=256$

Queste equazioni sono più complesse di quelle finora svolte, perché sulle incognite adesso influiscono due operazioni anziché una soltanto.

1) $21+12\cdot x=177$

Le operazioni dirette in questa equazione sono, in ordine: la moltiplicazione e l'addizione.
Le corrispondenti operazioni inverse sono: la divisione e la sottrazione.
Per avere le idee più chiare si osservi questo schema:

moltiplicazione → addizione → risultato

divisione ← sottrazione ← risultato

- Nel primo rigo sono elencate le operazioni dirette; le frecce indicano la loro sequenza.
- Nel secondo rigo sono elencate le operazioni inverse, ciascuna sotto la corrispondente operazione diretta. Le frecce indicano che l'ordine da seguire per risolvere l'equazione è inverso a quello della forma diretta.

Per ottenere il valore della x si deve iniziare dal risultato 177 e sottrarre da questo 21, poi si dividerà per 12. E’ opportuno scrivere per prima cosa l'espressione risolvente ed eseguire dopo i calcoli.

$$x=\frac{177-21}{12}=\frac{156}{12}=13$$

2) $y\cdot35-345=250$

In questa equazione le operazioni dirette sono, in ordine: la moltiplicazione e la sottrazione.
Le corrispondenti operazioni inverse sono: la divisione e l'addizione.
Si consideri che l'operazione inversa della sottrazione è l'addizione, perché l'incognita fa parte del minuendo.

moltiplicazione → **sottrazione** → **risultato**

divisione ← **addizione** ← **risultato**

Con l’aiuto dello schema, otteniamo l’espressione risolvente:

$$y=\frac{250+345}{35}=\frac{595}{35}=17$$

3) $923-23\cdot z=256$

Analizzando quali sono le operazioni dirette e quali quelle inverse, formeremo questo schema:

moltiplicazione → **sottrazione** → **risultato**

divisione ← **sottrazione** ← **risultato**

Si consideri che l’operazione inversa della sottrazione è ancora la sottrazione, perché l'incognita fa parte del sottraendo. Pertanto, per risolvere l'equazione, si deve applicare la proprietà del permutare. Vedi il paragrafo 7.3

si effettua uno scambio

$$923-256=23\cdot z \qquad z=\frac{923-256}{23}=\frac{667}{23}=29$$

Esercizio 12
Risolvete le seguenti equazioni.

$$\frac{7\cdot x}{4}=868 \quad ; \quad \frac{301+y}{29}=41 \quad ; \quad \frac{1538-z}{32}=13 \quad ; \quad \frac{w-753}{96}=87$$

Per risolvere queste equazioni ci serviremo ancora degli schemi usati nell'esercizio precedente.
Ben presto però, acquisita la dovuta destrezza, questi schemi diverranno superflui e così potremo scrivere direttamente le espressioni risolventi.

1) $\frac{7\cdot x}{4}=868$ $\qquad x=\frac{868\cdot 4}{7}=\frac{3472}{7}=496$

moltiplicazione ⟶ divisione ⟶ risultato
divisione ⟵ moltiplicazione ⟵ risultato

2) $\frac{301+y}{29}=41$ $\qquad y=41\cdot 29-301=1189-301=888$

addizione ⟶ divisione ⟶ risultato
sottrazione ⟵ moltiplicazione ⟵ risultato

3) $\frac{1538-z}{32}=13$ $\qquad z=1538-13\cdot 32=1538-416=1122$

sottrazione ⟶ divisione ⟶ risultato
sottrazione ⟵ moltiplicazione ⟵ risultato

La sottrazione che dobbiamo eseguire in questa espressione risolvente si ricava dalla proprietà del permutare.
Chiariamoci meglio le idee sul modo di procedere, trascrivendo le operazioni una alla volta:

si effettua uno scambio

$$\frac{1538-z}{32}=13 \quad\Rightarrow\quad 1538-z=13\cdot 32 \quad\Rightarrow\quad 1538-13\cdot 32=z$$

4) $\frac{w-753}{96}=87$ $\qquad w=87\cdot 96+753=8352+753=9105$

sottrazione ⟶ divisione ⟶ risultato
addizione ⟵ moltiplicazione ⟵ risultato

Esercizio 13

Risolvete le seguenti equazioni.

$$\frac{3599}{x+53}=61 \quad ; \quad \frac{1716}{y\cdot 12}=13 \quad ; \quad \frac{851}{z-409}=37 \quad ; \quad \frac{9090}{102-w}=90$$

1) $\dfrac{3599}{x+53}=61$ $\qquad x=\dfrac{3599}{61}-53=59-53=6$

addizione → **divisione** → **risultato**

sottrazione ← **divisione** ← **risultato**

L'operazione inversa di questa divisione è ancora la divisione, perché l'incognita fa parte del divisore.
Pertanto, per risolvere l'equazione, si deve applicare la proprietà del permutare. Si veda il paragrafo 8.3.
Per chiarire meglio le idee sul modo di procedere, seguiamo i passaggi uno alla volta:

$$\frac{3599}{x+53}=61 \Rightarrow \frac{3599}{61}=x+53 \Rightarrow \frac{3599}{61}-53=x$$

si effettua uno scambio

2) $\dfrac{1716}{y\cdot 12}=13$ $\qquad y=\dfrac{\frac{1716}{13}}{12}=\dfrac{132}{12}=11$

moltiplicazione → **divisione** → **risultato**

divisione ← **divisione** ← **risultato**

La prima divisione da eseguire nell'espressione risolvente si ottiene applicando la proprietà del permutare.
Seguiamo i passaggi uno alla volta:

$$\frac{1716}{y\cdot 12}=13 \Rightarrow \frac{1716}{13}=y\cdot 12 \Rightarrow \frac{\frac{1716}{13}}{12}=y$$

3) $\dfrac{851}{z-409}=37$ $\qquad z=\dfrac{851}{37}+409=23+409=432$

sottrazione → **divisione** → **risultato**

addizione ← **divisione** ← **risultato**

4) $\dfrac{9090}{102-w}=90$ $\qquad w=102-\dfrac{9090}{90}=102-101=1$

sottrazione $\longrightarrow$ **divisione** $\longrightarrow$ **risultato**

sottrazione $\longleftarrow$ **divisione** $\longleftarrow$ **risultato**

Per ricavare l'espressione risolvente si deve applicare prima la proprietà del permutare della divisione e successivamente la proprietà del permutare della sottrazione. Seguiamo i passaggi uno alla volta:

$$\frac{9090}{102-w}=90 \qquad \frac{9090}{90}=102-w \;\Rightarrow\; 102-\frac{9090}{90}=w$$

8.7 Equazioni letterali

Esercizio 14

Risolvete le seguenti equazioni letterali.

$$a+b\cdot x=m \quad ; \quad \frac{c-n}{y}=d \quad ; \quad \frac{c\cdot n}{m-z}=b$$

Poiché in queste equazioni i numeri noti sono sostituiti dalle lettere, si dovranno scrivere solo le espressioni risolventi.

1) $a+b\cdot x=m$ $\qquad x=\dfrac{m-a}{b}$

moltiplicazione $\longrightarrow$ **addizione** $\longrightarrow$ **risultato**

divisione $\longleftarrow$ **sottrazione** $\longleftarrow$ **risultato**

2) $\dfrac{c-n}{y}=d$ $\qquad y=\dfrac{c-n}{d}$

divisione $\longrightarrow$ **risultato**

divisione $\longleftarrow$ **risultato**

Si faccia attenzione, in questa equazione l'operazione di sottrazione non influisce sull'incognita, per cui non va considerata tra le operazioni dirette e si deve trascrive nell'espressione risolvente senza alcuna modifica.

4) $\dfrac{c \cdot n}{m-z}=b$ $\qquad z=m-\dfrac{c \cdot n}{b}$

sottrazione ⟶ divisione ⟶ risultato

sottrazione ⟵ divisione ⟵ risultato

Se ancora non si è acquisita la giusta abilità, anche in questo caso è meglio eseguire i passaggi ad uno ad uno.

Esercizio 15

Risolvete la seguente equazione rispetto a ciascuna delle sue lettere.

$$\frac{c-n}{m+a}=b$$

Si devono considerare, a turno, una lettera come incognita e le rimanenti come termini noti.

1) Risolviamo l'equazione rispetto alla lettera c, cioè considerando questa una incognita.

$c=b \cdot (m+a)+n$

sottr. ⟶ divis. ⟶ ris.

add. ⟵ molt. ⟵ ris.

2) Risolviamo rispetto alla lettera n.

$n=c-b \cdot (m+a)$

sottr. ⟶ divis. ⟶ ris.

sottr. ⟵ molt. ⟵ ris.

3) Risolviamo rispetto alla lettera m.

$m=\dfrac{c-n}{b}-a$

add. ⟶ divis. ⟶ ris.

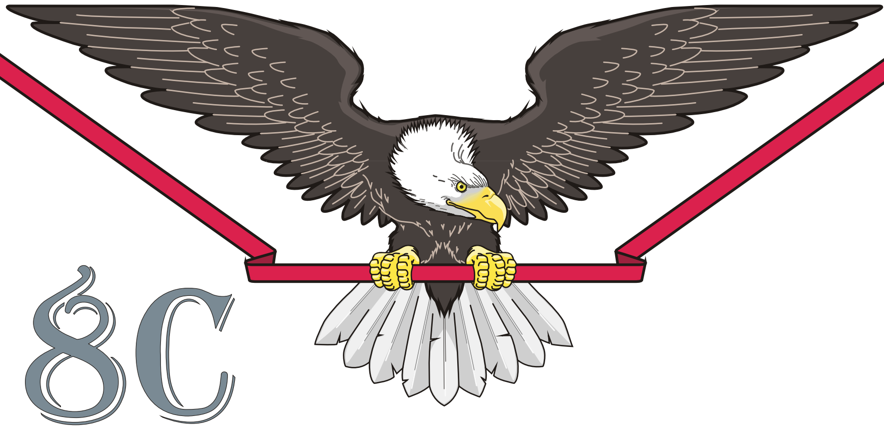
sottr. ⟵ divis. ⟵ ris.

4) Risolviamo rispetto alla lettera a.

$a=\dfrac{c-n}{b}-m$

add. ⟶ divis. ⟶ ris.

sottr. ⟵ divis. ⟵ ris.



8C

OPERAZIONE DI DIVISIONE IN N

Esercizi e Complementi

8.1C Le equazioni in N

Esercizio 16
Calcolate quali numeri naturali si devono sostituire alle incognite, affinché si verifichino le uguaglianze.

a) $10 \cdot x = 90$; $y \cdot 30 = 120$; $z \cdot 15 = 3000$; $35 \cdot w = 140$
b) $x \cdot 17 = 323$; $38 \cdot y = 418$; $26 \cdot z = 624$; $w \cdot 21 = 819$
c) $750 \cdot w = 30750$; $z \cdot 20 = 2000$; $y \cdot 179 = 8950$

Esercizio 17
Risolvete le seguenti equazioni.

a) $20 \cdot x = 100$; $y \cdot 100 = 6500$; $91 \cdot z = 91000$; $w \cdot 48 = 480$
b) $x \cdot 66 = 726$; $59 \cdot y = 1829$; $z \cdot 31 = 2697$; $48 \cdot w = 144$
c) $21 \cdot y = 441$; $w \cdot 573 = 9741$; $3081 \cdot x = 434421$

Esercizio 18
Rispondete alle seguenti domande.
- Cos'è una uguaglianza?
- Cos'è una equazione?
- Cos'è una incognita?
- Cosa significa risolvere una equazione in N?
- Cosa significa equazione in N?

Esercizio 19
Osservate il riquadro della figura 1, paragrafo 8.1, e spiegate il significato dei simboli.
Di che tipo è l'equazione rappresentata in esso?
Quale operazione c'è a primo membro dell'equazione?

Esercizio 20
Osservate il riquadro della figura 1, paragrafo 8.1, e rispondete alle seguenti domande.
E' possibile che il prodotto di due numeri naturali non sia multiplo di uno dei suoi fattori?
E' possibile che il prodotto di due numeri naturali sia un numero uguale ad uno dei suoi fattori?
E' possibile che il prodotto di due numeri naturali non sia un numero naturale?

Esercizio 21
Date la definizione di equazione risolvibile in N.
Date la definizione di equazione non risolvibile in N.
Osservate la figura 1, paragrafo 8.1, e dite quale condizione si deve porre affinché l'equazione con un fattore incognito sia risolvibile in N.

Esercizio 22
Osservate le seguenti equazioni e dite quali non sono risolvibili in N e perché.
$x \cdot 58=5800$; $31 \cdot y=21$; $z \cdot 5=30$; $767 \cdot w=80$; $10 \cdot k=33$

8.2C L'operazione di divisione in N

Esercizio 23
Risolvete le seguenti equazioni con fattore incognito per tentativi.
$x \cdot 8=120$; $36 \cdot y=900$; $z \cdot 70=2100$; $16 \cdot w=336$

Esercizio 24
Spiegate quali sono le caratteristiche della tavola pitagorica.
Cosa rappresentano i suoi righi? e cosa le sue colonne?
Cosa si ottiene incrociando un rigo con una colonna?
Risolvete le seguenti equazioni con un fattore incognito, utilizzando la tavola pitagorica del paragrafo 8.2.
$14 \cdot x=56$; $y \cdot 18=324$; $w \cdot 19=342$; $17 \cdot z=204$

Esercizio 25
Dite che cosa rappresenta l'uguaglianza $m:n=p$
Qual è il dividendo? quale il divisore? quale il quoto?
Quali condizioni si devono porre affinché questa uguaglianza si possa verificare in N ?

Esercizio 26
Date la definizione di operazione di divisione.
Con quale segno si rappresenta questa operazione?

Esercizio 27
Qual è il segno della divisione? Tra quali numeri si mette?
Come si chiama il risultato di questa operazione?
Come si chiama il suo primo termine? E il secondo?
Cos'è il resto della divisione?
Qual è la differenza tra quoto e quoziente?

Esercizio 28
Risolvete le seguenti equazioni con un fattore incognito, mediante l'algoritmo di divisione.
Dopo sostituite alle incognite i valori trovati e verificate l'esattezza dei calcoli effettuati.

a) $x \cdot 9=72$; $y \cdot 7=91$; $z \cdot 11=99$; $w \cdot 13=39$;
b) $23 \cdot x=184$; $55 \cdot y=495$; $79 \cdot z=553$; $67 \cdot w=737$;
c) $19 \cdot x=1729$; $34 \cdot y=2992$; $86 \cdot z=6708$; $94 \cdot w=5170$;
d) $x \cdot 17=221$; $y \cdot 15=13065$; $z \cdot 45=4545$; $w \cdot 37=167166$;
e) $335 \cdot x=29815$; $y \cdot 167=83667$; $w \cdot 5007=1762464$;
f) $x \cdot 111=86247$; $y \cdot 588=62916$; $w \cdot 736=606464$;
g) $z \cdot 3013=376625$; $y \cdot 6784=5508608$; $z \cdot 8778=10911054$;
h) $2001 \cdot z=2009004$; $k \cdot 568=120984$; $v \cdot 35067=28544538$;
i) $30204 \cdot x=543672$; $y \cdot 25878=1475046$; $3448 \cdot z=751664$

Esercizio 29
Eseguite i calcoli mediante l'algoritmo di divisione.
Verificate poi l'esattezza dei calcoli, moltiplicando il quoto con il divisore.

a) 7245:45 ; 241530:582 ; 2949456:11432 ;
b) 7091568:7986 ; 119716:346 ; 3116140:4211 ;
c) 7249893:1043 ; 629727:29987 ; 33844205:4855

Esercizio 30
Risolvete le seguenti equazioni con un fattore incognito usando la calcolatrice.

$x \cdot 45=245520$; $y \cdot 546=4652466$; $8762 \cdot z=61211332$

Esercizio 31
Eseguite le divisioni con l'uso della calcolatrice.

24752554:28321 ; 34037250:6982 ; 6496100:19988 ;

273751296:47004 ; 33153659:329 ; 4380790476:44556

8.3C Proprietà della divisione

Esercizio 32
Risolvete le seguenti equazioni visualizzando sulla tavola pitagorica il procedimento risolutivo.
Dopo sostituite alle incognite i valori trovati e verificate le uguaglianze ottenute.

a) $19 \cdot x = 51$; $y \cdot 14 = 98$; $13 \cdot z = 117$; $w \cdot 12 = 92$
b) $x \cdot 15 = 105$; $17 \cdot y = 306$; $z \cdot 11 = 209$; $16 \cdot w = 240$
c) $12 \cdot x = 228$; $y \cdot 18 = 198$; $14 \cdot z = 168$; $w \cdot 9 = 117$
d) $x \cdot 20 = 400$; $y \cdot 19 = 304$; $z \cdot 16 = 192$; $w \cdot 13 = 221$

Esercizio 33
Dite quali delle seguenti divisioni non si possono eseguire in N e perché.

23:58 ; 187:10 ; 8100:100 ; 455:7123 ; 34:34

Esercizio 34
Leggete le seguenti relazioni.

$b < a \Rightarrow b:a \notin \mathbb{N}$

$b \geq a \Rightarrow b:a \in \mathbb{N}$

Stabilite poi se sono vere o false.
Quale condizione si deve porre affinché la divisione sia possibile in N?

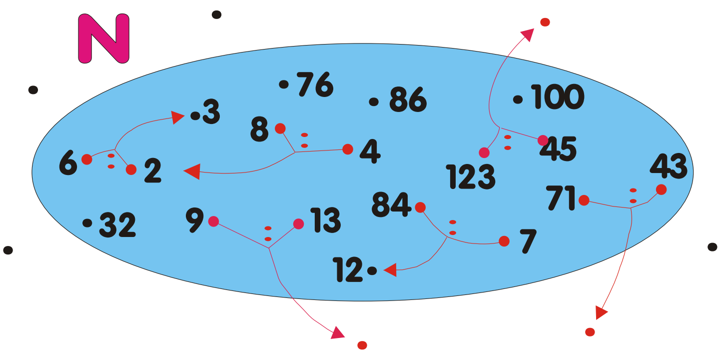
Esercizio 35
Spiegate cos'è una legge di composizione interna di N.
L'operazione di divisione è una legge di composizione interna di N ?
L'operazione di moltiplicazione è una legge di composizione interna di N ?
Quali altre operazioni, tra quelle studiate, sono leggi di composizione interna di N ?
E' corretto dire che l'insieme N è chiuso rispetto alla divisione? e rispetto alla moltiplicazione?

Esercizio 36
Stabilite per quali dei seguenti numeri è divisibile 138.

2 ; 3 ; 10 ; 7 ; 18 ; 45 ; 138; 100 ; 13 ; 23 ; 46 ; 1 ; 0 ; 5

Per esprimere che la divisione non è una operazione interna dell'insieme N si può ricorrere all'enunciato e alla figura seguenti.

L'insieme N non è chiuso rispetto all'operazione di divisione.

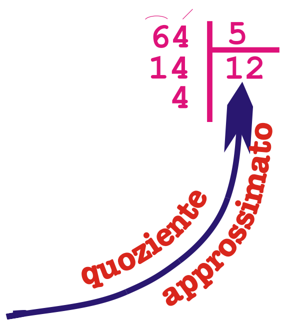


La divisione non è una legge di composizione interna di N

Il grafico mostra che il quoto tra due numeri naturali non sempre si trova all'interno dell'insieme N.

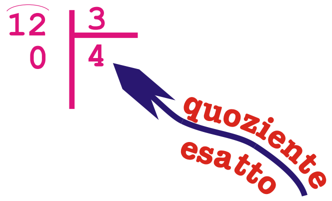
Esercizio 37
Se il resto che si ottiene eseguendo l'algoritmo di divisione è zero, cosa se ne deduce?
E se invece è diverso da zero?
Dite quali sono i significati dei due vocaboli quoto e quoziente.
In quale caso si dice che un numero naturale è divisibile per un altro?

Il risultato che si ottiene eseguendo la divisione tra due numeri si dice:
- quoziente approssimato, se il resto della divisione è diverso da zero;
- quoziente esatto, se il resto della divisione è zero.



Per le divisioni vale la seguente uguaglianza:

Dividendo = divisore per quoziente più resto



$64=5\cdot12+4$

$12=3\cdot4+0$

Esercizio 38
Verificate quali delle seguenti uguaglianze sono vere. Sapreste spiegare perché alcune di esse sono false?

$134:67=67:134$; $8734+663=663+8734$; $34 \cdot 36=36 \cdot 34$;
$70327-201=201-70327$; $7^4=4^7$; $4374:54=54:4374$

Esercizio 39
Senza eseguire i calcoli dite quali delle seguenti uguaglianze sono vere e quali quelle false.
Spiegate il motivo delle vostre affermazioni.

$1081:23=23:1081$; $334+72=72+334$; $34 \cdot 23=23 \cdot 34$;
$937-331=331-937$; $12^5=5^{12}$; $m:n=n:m$

Esercizio 40
E' valida la proprietà commutativa per la divisione?
Per quali operazioni, tra quelle studiate, è valida la proprietà commutativa?

Esercizio 41
Verificate quali delle seguenti uguaglianze sono vere. Sapreste spiegare perché alcune di esse sono false?

$(1344:24):8=1344:(24:8)$; $58614-(737-34)=(58614-737)-34$;
$213 \cdot 12 \cdot 50=12 \cdot 213 \cdot 50$; $1134:(18:9)=(1134:9):18$

Esercizio 42
Senza eseguire i calcoli dite quali delle seguenti uguaglianze sono vere e quali quelle false.
Spiegate il motivo delle vostre affermazioni.

$(2688:48):8=2688:(48:8)$; $5304+203+13=13+5304+203$;
$44 \cdot 223 \cdot 24=223 \cdot 44 \cdot 24$; $3^{5^6}=5^{3^6}$; $(423-16)-52=423-(52-16)$

Esercizio 43
E' valida la proprietà associativa per la divisione?
Per quali operazioni, tra quelle studiate, è valida?

Esercizio 44
Verificate le seguenti disuguaglianze.

$256:32 \neq 32:256$; $15+83+99 \neq 99+15+83$; $94-24-6 \neq 94-6-24$;
$(4374:54):9 \neq 4374:(54:9)$; $237-(314-54) \neq (237-314)-54$

Esercizio 45

Senza eseguire i calcoli dite quali delle seguenti uguaglianze sono vere e quali false.
Spiegate il motivo delle vostre affermazioni.

$864:36:12=864:(36:12)$; $123+(45+17)=(123+45)+17$;
$3\cdot(45\cdot7)=(3\cdot45)\cdot7$; $59-32-7=59-(32-7)$; $(m:n):c=m:(n:c)$

Esercizio 46

Leggete le seguenti disuguaglianze e spiegatele:

$a:b\neq b:a$; $a:(b:c)\neq(a:b):c$

Sostituendo al segno di divisione il segno della moltiplicazione, le disuguaglianze saranno ancora valide?
E sostituendo il meno della sottrazione?
E sostituendo l'operazione di potenza?

Esercizio 47

Quali analogie si riscontrano tra le operazioni di sottrazione e di divisione?

Proprietà invariantiva della divisione

Se si moltiplicano (o si dividono) entrambi i termini della divisione per lo stesso numero, diverso da zero, il quoto non cambia.

Se il dividendo non è multiplo del divisore, applicando questa proprietà, il quoziente non cambia, mentre il resto della divisione risulta anch'esso moltiplicato, o diviso, per lo stesso numero.

Esempi:

$72:9=8$

$(72\cdot5):(9\cdot5)=360:45=8$

$$\begin{array}{r|l} 72 & 9 \\ \hline 0 & 8 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 360 & 45 \\ \hline 0 & 8 \end{array}$$

$114:12=9$ con resto 6

$(114:3):(12:3)=38:4=9$ con resto $6:3=2$

$$\begin{array}{r|l} 114 & 12 \\ \hline 108 & 9 \\ 6 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 38 & 4 \\ \hline 36 & 9 \\ 2 & \end{array}$$

In forma generale:

$a:b=c \Rightarrow (a\cdot n):(b\cdot n)=c$

$a:b=c \Rightarrow (a:n):(b:n)=c$

Esercizio 48
Osservate la figura 6, paragrafo 8.3, e spiegate cosa rappresenta.
E' possibile sostituire ciascuna di queste uguaglianze con una delle altre due.
Spiegate il motivo della vostra affermazione.

Esercizio 49
Enunciate la proprietà fondamentale della divisione ed esprimetela in simboli.

Esercizio 50
Enunciate la proprietà del permutare della divisione ed esprimetela in simboli.

Esercizio 51
Osservate la figura 6, paragrafo 8.3, e dite quale sostituzione si deve effettuare tra le uguaglianze rappresentate per applicare la proprietà fondamentale.

Esercizio 52
Osservate la figura 6, paragrafo 8.3, e dite quale sostituzione si deve effettuare tra le uguaglianze rappresentate per applicare la proprietà del permutare.

Esercizio 53
Mettete a confronto la figura 6 del paragrafo 8.3 con la figura 8 del paragrafo 7.3.
Quali analogie riscontrate?

Esercizio 54
Applicate a queste divisioni la proprietà fondamentale e verificate le uguaglianze che si ottengono.
21:7=3 ; 63:7=9 ; 110:11=10 ; 156:12=13 ; 1368:38=36 ;
12728:86=148 ; 39032:476=82 ; 288999:591=489

Esercizio 55
Applicate a queste divisioni la proprietà del permutare e verificate le uguaglianze che si ottengono.
12:3=4 ; 34:17=2 ; 45:3=15 ; 140:14=10 ; 91:13=7 ;
255:15=17 ; 1073:29=37 ; 12410:146=85 ; 425304:594=716

Esercizio 56
Applicate a ciascuna uguaglianza sia la proprietà fondamentale sia la proprietà del permutare.
42:6=7 ; 1736:31=56 ; 17355:39=445 ; 193110:246=785 ;
96-79=17 ; 205-102=103 ; 2005-1321=684 ; 8875-776=8099

Esercizio 57
Leggete le relazioni delle figure 7 e 8, paragrafo 8.3, ed enunciate le proprietà rappresentate.

8.4C Operazioni dirette e inverse

Esercizio 58
Date la definizione di operazione diretta e di operazione inversa.

Esercizio 59
Dite quante operazioni inverse ha l'operazione di moltiplicazione e perché.

Esercizio 60
Dite qual è l'operazione diretta e quale quella inversa nell'equazione con un fattore incognito.
Rappresentate in simboli questo tipo di equazione e la corrispondente espressione risolvente.

Esercizio 61
E'importante il posto in cui compare l'incognita nelle equazioni con un fattore incognito? E in quelle con un addendo incognito?
Quali analogie riscontrate tra le operazioni di addizione e di moltiplicazione?

Esercizio 62
Dite di che tipo sono le seguenti equazioni.
$59 \cdot x = 649$; $y \cdot 34 = 3434$
Cosa c'è di diverso tra di esse? Sono differenti le loro operazioni inverse? Risolvetele.

Esercizio 63
Dite quante operazioni inverse ha l'operazione di divisione e perché.

Esercizio 64
Di che tipo sono le seguenti equazioni?

$x:19=37$; $4081:y=53$

Cosa c'è di diverso tra di esse? Sono differenti le loro operazioni inverse?
Risolvetele.

Esercizio 65
Dite quali sono le operazioni dirette e quali le inverse nelle equazioni in cui sull'incognita influisce la divisione.
Rappresentate in simboli questi tipi di equazioni e le corrispondenti espressioni risolventi.

Esercizio 66
Quando l'operazione diretta è la sottrazione, è importante il posto in cui compare l'incognita? Perché?
Quali analogie riscontrate con la divisione?

Esercizio 67
Stabilite di che tipo sono le seguenti equazioni, descrivetele e dopo risolvetele.

$z\cdot706=20474$; $x:89=397$; $5720:y=65$; $45\cdot w=2970$

Quali differenze riscontrate tra le operazioni di divisione e di moltiplicazione?

Esercizio 68
Rappresentate in simboli l'equazione con il dividendo incognito e la sua espressione risolvente.

Esercizio 69
Rappresentate in simboli l'equazione con il divisore incognito e la sua espressione risolvente.

Esercizio 70
Qual é l'operazione diretta nelle equazioni con il dividendo incognito? e quale quella inversa?

Esercizio 71
Qual é l'operazione diretta nelle equazioni con il divisore incognito? e quale quella inversa?

Esercizio 72
Con quale operazione si risolvono le equazioni con un fattore incognito?
Con quale operazione si risolvono le equazioni con il dividendo incognito?
Con quale operazione si risolvono le equazioni con il divisore incognito?

Esercizio 73
Quante operazioni inverse ha la moltiplicazione?
Quante operazioni inverse ha la divisione?

Esercizio 74
Dite di che tipo sono le seguenti equazioni e risolvetele.
$x+5706=60414$; $z-889=779$; $3200-y=651$; $450+w=991$;
$301\cdot k=32207$; $p:64=75$; $5723:t=97$; $v\cdot 336=202944$
Quali analogie e quali differenze riscontrate tra le operazioni qui rappresentate?
Quali le loro operazioni inverse?

Esercizio 75
Quante operazioni inverse ha l'addizione? E quante la moltiplicazione?
Quali sono le analogie tra queste due operazioni, riguardo alle operazioni dirette e inverse?

Esercizio 76
Quante operazioni inverse ha la sottrazione? E quante la divisione?
Quali sono le analogie tra queste due operazioni, riguardo alle operazioni dirette e inverse?

Esercizio 77
Dite per quali motivi l'addizione e la moltiplicazione hanno una sola operazione inversa mentre la sottrazione e la divisione ne hanno due.

8.5C I numeri 0 e 1 nella divisione

Esercizio 78
Eseguite i calcoli delle seguenti divisioni.

53:0= ;	0:53= ;	0:0= ;	48:48= ;
1:0= ;	0:1= ;	33:1= ;	1:33= ;
1:1= ;	$a:a=$;	$a:1=$;	$a:0=$;
$0:a=$;	$1:a=$	(con $a \neq 0$; 1)	

Esercizio 79
Qual è il quoto tra due numeri naturali nel caso in cui il primo termine è 0? e nel caso in cui il secondo termine è 1?
In quale caso è possibile eseguire in N la divisione che ha il dividendo uguale a 1 ?
Qual è il quoto nel caso in cui entrambi i termini sono uguali, ma diversi da zero?

Esercizio 80
Qual è la definizione di numero multiplo?
Quali sono i multipli di 0? e quali i multipli di uno?
Di quali numeri è multiplo 0? e di quali è multiplo 1?

Esercizio 81
Osservate la tavola pitagorica della figura 12, paragrafo 8.5. In quale rigo e in quale colonna si trovano i multipli di zero?
In quale rigo e in quale colonna i multipli di uno?

Esercizio 82
Risolvete le seguenti equazioni.

$64 \cdot x=0$; $y \cdot 1=1$; $1 \cdot z=65$; $w \cdot 0=0$; $0 \cdot p=81$; $k \cdot 202=202$;
$0 \cdot v=41$; $67 \cdot t=1$

Quante soluzioni ha l'equazione $w \cdot 0=0$?

Esercizio 83
Risolvete le seguenti equazioni.

$x:0=58$; $0:y=10$; $0:v=0$; $1:z=15$; $133:t=1$;
$w:0=0$; $72:k=72$; $531:p=0$; $q:1=10$; $r:1=1$

Esercizio 84
Esiste l'elemento neutro della divisione in N?
Per quali operazioni esiste l'elemento neutro?

Esercizio 85
Dite quali delle seguenti uguaglianze sono vere.

$a:1=a$; $1:a=a$; $0:c=c$; $b:0=b$; $1\cdot m=m$; $b\cdot 0=b$;
$m-0=m$; $m-1=m$; $a^0=a$; $a^1=a$; $1^a=a$; $n+1=n$; $c+0=c$

Esercizio 86
Dite quali delle seguenti uguaglianze sono vere:

$1:a=a:1$; $0+n=n+0$; $1\cdot c=c\cdot 1$; $0-a=a-0$; $0\cdot m=m\cdot 0$;
$1\cdot m=m\cdot 1$; $a^0=0^a$; $b^1=1^b$; $0:b=b:0$

Esercizio 87
Quali analogie ci sono tra la sottrazione e la divisione riguardo all'elemento neutro? E quali differenze?

Nelle divisioni Il numero 1 non influisce nei calcoli, quando è il divisore: il quoto che si ottiene è uguale al dividendo.
Tuttavia 1 non è l'elemento neutro per la divisione in N, perché questa operazione non ha la proprietà commutativa.
Infatti, $a:1=a$ **ma** $1:a\neq a$ $(a\neq 1)$
Questa caratteristica è espressa dal seguente enunciato.

Il numero 1 è l'elemento neutro destro della divisione in N

8.6C Espressioni ed equazioni in N

Esercizio 88
Eseguite i calcoli delle seguenti espressioni.

a) $34+63:9=$
b) $72:9+55=$
c) $73456-51225:75=$
d) $1652:28-37=$
e) $660\cdot 32:8-2640=$
f) $1368:19\cdot 45=$
g) $6^4:24\cdot 18=$
h) $192\cdot 48:4^3=$
i) $38808:168:21=$
l) $67+(3468:34)=$
m) $38808:(168:21)=$
n) $2450-(49112:56)=$

Esercizio 89
Riscrivete le espressioni dell'esercizio 88 mettendo la linea di frazione al posto del segno di divisione.

Esercizio 90
Eseguite i calcoli delle seguenti espressioni.

a) $(18+63):9=$
b) $(187-79):9=$
c) $(91681-3456):25=$
d) $(645-150):(556-457)=$
e) $660\cdot 32:8\cdot 11=$
f) $(660:22)\cdot(32:8)\cdot 11=$
g) $(660\cdot 32):(8\cdot 11)=$
h) $(5^3-7^2):(3^4-4^2-46)=$
i) $32+3^4-15^2:25+198:18\cdot 21=$
l) $(21^2-15^2)\cdot 8:(12\cdot 16)=$
m) $88\cdot 2^4:4^3+16\cdot 38:(168-92)=$
n) $(2^5+4^3):8+2695:(15^2+20)=$

Esercizio 91
Riscrivete le espressioni dell'esercizio 90 mettendo le linee di frazioni al posto dei segni di divisione.

Esercizio 92
Eseguite i calcoli delle seguenti espressioni.

a) $(33+53\cdot 21):191+(5^4:5^3+30\cdot 12:45)+675:45=$ [34]
b) $[(961-456):101+1022]:79+197-210=$ [0]
c) $(66\cdot 37):(6\cdot 11):\{[(3^5-121):61+2^5]:17+27+334-326\}=$ [1]

Esercizio 93
Eseguite i calcoli delle seguenti espressioni.

a) $\frac{33}{11}+\frac{45}{15}+\frac{720}{180}+218=$
b) $\frac{99}{11}-\frac{54}{18}-\frac{555}{111}-1=$
c) $\frac{36}{18}\cdot\frac{63}{21}+\left(\frac{33}{11}\right)^3-\frac{26}{13}=$
d) $\frac{78}{39}\cdot\frac{63}{21}+\left(\frac{51}{17}-\frac{26}{13}\right)^3=$
e) $\frac{88}{4}+\left(\frac{65}{13}\right)^2+\frac{217}{31}\cdot 11=$
f) $\frac{68}{4}+\left(\frac{96}{12}-\frac{246}{82}\right)^2\cdot 21=$

Esercizio 94
Eseguite i calcoli delle seguenti espressioni.

a) $\frac{33+77}{10}+\frac{873-797}{19}+\frac{3^3\cdot 77}{99}=$ [36]
b) $\frac{(10^3-8^2+9\cdot 6^3)\cdot 32}{1440}-\frac{(738-696)\cdot 32}{56}-\frac{3^2\cdot(77+33)}{90}=$ [29]
c) $\frac{(5^3+8^2-6^2)\cdot 52}{440-219}-\frac{15+38\cdot 7^2-8^3+450}{4^4+40\cdot 7^3-13811}-13=$ [12]

Esercizio 95

Eseguite i calcoli delle seguenti espressioni.

a) $\{[19+(6\cdot4-2^4):4]:7+21-9\}:5+(2^7:4^2-2)\cdot5:30=$ [4]

b) $(4^3\cdot4+4):13+\{56+[31\cdot(5^4-15\cdot13):5-2176]-344\}:101=$ [22]

c) $102-\{266-[13^2-655:131:(77\cdot8^2-4923)-162]^3\}:2=$ [77]

Esercizio 96

Eseguite i calcoli delle seguenti espressioni.

a) $\dfrac{(23\cdot56-1200)\cdot9}{224+(3^5-203)-165}+\dfrac{[88-(43-6^2)^2-12]-27}{[54+(3\cdot45-23)]-165}=$ [8]

b) $\dfrac{\{[(2^6\cdot5-311)\cdot9]-73\}\cdot77-616}{\{24+[(31\cdot77-2307)-16]+36\}-24}+\dfrac{\{[(14-3^2)^2-12]+12\}\cdot6}{35+(3\cdot14-39)-33}$ [30]

Esercizio 97

Risolvete le seguenti equazioni.

$x\cdot56=1624$; $98\cdot y=5390$; $w:67=76$; $3894:z=66$;

$k\cdot301=84581$; $v:707=606$; $482528:t=544$

Esercizio 98

Risolvete le seguenti equazioni.

$x\cdot193=143013$; $y:753=528$; $502740:w=588$; $237\cdot z=189$;

$k\cdot445=334$; $t:366=41$; $776:v=800$; $888\cdot s=591408$

Esercizio 99

Risolvete le seguenti equazioni.

$x:367=367$; $452:y=452$; $7528:w=1$; $z:837=1$

Esercizio 100

Risolvete le seguenti equazioni.

$356400:x=550$; $1357\cdot y=110731$; $z:137=109$; $764:w=504$

Esercizio 101

Risolvete le seguenti equazioni.

$15\cdot x+40=100$; $103+23\cdot y=310$; $w\cdot13-90=14$; $250-z\cdot15=55$

Esercizio 102

Risolvete le seguenti equazioni.

$35\cdot x+64=1709$; $37\cdot y-1078=1919$; $5675-z\cdot15=4685$

Esercizio 103
Risolvete le seguenti equazioni.

$$\frac{9\cdot x}{12}=6 \quad ; \quad \frac{34+x}{23}=104 \quad ; \quad \frac{z-134}{27}=7 \quad ; \quad \frac{234-w}{31}=6$$

Esercizio 104
Risolvete le seguenti equazioni.

$$\frac{48}{x+7}=6 \quad ; \quad \frac{1440}{y\cdot 9}=32 \quad ; \quad \frac{792}{z-34}=72 \quad ; \quad \frac{252}{86-w}=7 \quad ;$$

Esercizio 105
Risolvete le seguenti equazioni.

a) $x\cdot 23=1334$; $44+77\cdot y=6281$; $25\cdot z-505=70$;

b) $5776-74\cdot w=1632$; $3^4\cdot k+34=9835$; $32\cdot 23-v=285$

c) $\frac{39\cdot x}{132}=65$; $\frac{4576}{y\cdot 44}=13$; $\frac{87169-w}{731}=47$; $\frac{7392}{z-34}=672$

8.7C Equazioni letterali

Esercizio 106
Risolvete le seguenti equazioni letterali.

$a\cdot x+b=c$; $m+n\cdot y=p$; $z\cdot c-b=a$; $d-w\cdot f=g$

Esercizio 107
Risolvete le seguenti equazioni letterali.

$$\frac{a\cdot x}{c}=b \quad ; \quad \frac{m+y}{n}=p \quad ; \quad \frac{z-d}{f}=g \quad ; \quad \frac{r-w}{e}=a$$

Esercizio 108
Risolvete le seguenti equazioni letterali.

$$\frac{a}{x+b}=c \quad ; \quad \frac{m}{y\cdot n}=p \quad ; \quad \frac{f}{z-d}=g \quad ; \quad \frac{r}{p-w}=q$$

Esercizio 109
Risolvete rispetto a ciascuna lettera.

$$\frac{m-a}{x\cdot b}=c \quad ; \quad \frac{r\cdot f}{z-d}=g$$

Le operazioni di estrazione di radice e di logaritmo

9

9.1 Le equazioni in N

Esercizio 1
Calcolate quali numeri naturali si devono sostituire alle lettere x e y affinché si verifichino le seguenti uguaglianze.

$$x^3=343 \quad ; \quad 5^y=625$$

Per risolvere queste equazioni è necessario riflettere sulle operazioni che compaiono in esse.
Su entrambe le incognite influisce la stessa operazione di potenza, la quale assume il ruolo di operazione diretta. Ma si deve considerare anche che l'incognita x è la base della potenza, mentre l'incognita y è l'esponente.

Dobbiamo tenere presente che questa operazione non ha la proprietà commutativa:

$$a^x \neq x^a$$

(Si riveda il paragrafo 6.4)

Per cui, quando l'operazione diretta è la potenza, è necessario distinguere l'equazione con la base incognita da quella con l'esponente incognito.

1) Risolviamo la prima equazione dell'esercizio 1.

$$x^3=343$$

E' una equazione con la base incognita

Ricordando la definizione di potenza, risolvere questa equazione in N significa trovare qual è il numero naturale che si deve moltiplicare per sé stesso 3 volte affinché si ottenga come risultato 343.

Procediamo per tentativi.

Ponendo $x=2$ si avranno le seguenti relazioni:

$$2^3=2\cdot2\cdot2=8 \;\; ; \;\; 2^3\neq343 \;\; \Rightarrow \;\; x\neq2 \;\; ; \;\; x>2$$

Aumentiamo il valore, ponendo $x=10$.
Si avranno così queste altre relazioni:

$$10^3=10\cdot10\cdot10=1000 \;\; ; \;\; 10^3\neq343 \;\; \Rightarrow \;\; x\neq10 \;\; ; \;\; x<10$$

Pertanto la x è compresa tra 2 e 10:

$$2<x<10$$

Scegliendo un numero naturale maggiore di 2 e minore di 10, si continuerà con la verifica.
Proseguendo in questo modo, l'intervallo in cui cercare il valore dell'incognita si restringerà sempre più, fino a quando si avrà il seguente risultato:

$$7^3=7\cdot7\cdot7=343 \quad \Rightarrow \quad x=7$$

2) Risolviamo la seconda equazione dell'esercizio 1.

$$5^y=625$$

E' una equazione con l'esponente incognito

Ricordando ancora la definizione di potenza, risolvere questa equazione in N significa calcolare quante volte si deve moltiplicare per sé stessa la base 5 per ottenere il risultato 625.

Eseguiamo le moltiplicazioni:

$$5\cdot5=25 \;;\; 5\cdot5\cdot5=125 \;;\; 5\cdot5\cdot5\cdot5=625$$

Ottenuto il risultato 625, e contando quante volte abbiamo moltiplicato consecutivamente la base 4, concluderemo con la relazione:

$$5\cdot5\cdot5\cdot5=625 \quad \Rightarrow \quad y=4$$

Se mettiamo le lettere al posto dei numeri, le due equazioni dell'esercizio 1 assumeranno le forme generali rappresentate nelle figure 1 e 2 seguenti.

$$x^a=b$$
$$a,b \in N$$

EQUAZIONE IN N
CON BASE
INCOGNITA

fig.1

$$a^x=b$$
$$a,b \in N$$

EQUAZIONE IN N
CON ESPONENTE
INCOGNITO

fig.2

E' bene precisare fin da adesso che la condizione $a,b \in N$ non è sufficiente per potere concludere che le equazioni delle figure 1 e 2 siano risolvibili in N.

9.2 L' estrazione di radice in N

Esercizio 2
Risolvete la seguente equazione.

$x^5=1024$

Questa è una equazione con la base incognita.
Per risolverla procederemo per tentativi, così come abbiamo fatto con l'equazione dell'esercizio precedente.
Troveremo in questo modo che l'incognita vale 4.
Infatti:

$$4^5=4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4=1024 \quad \Rightarrow \quad x=4$$

Adesso però è necessario trovare un simbolismo appropriato per indicare i procedimenti risolutivi usati sia per risolvere le equazioni con un addendo incognito sia per risolvere quelle con un fattore incognito.
A questo fine è opportuno tenere conto delle seguenti

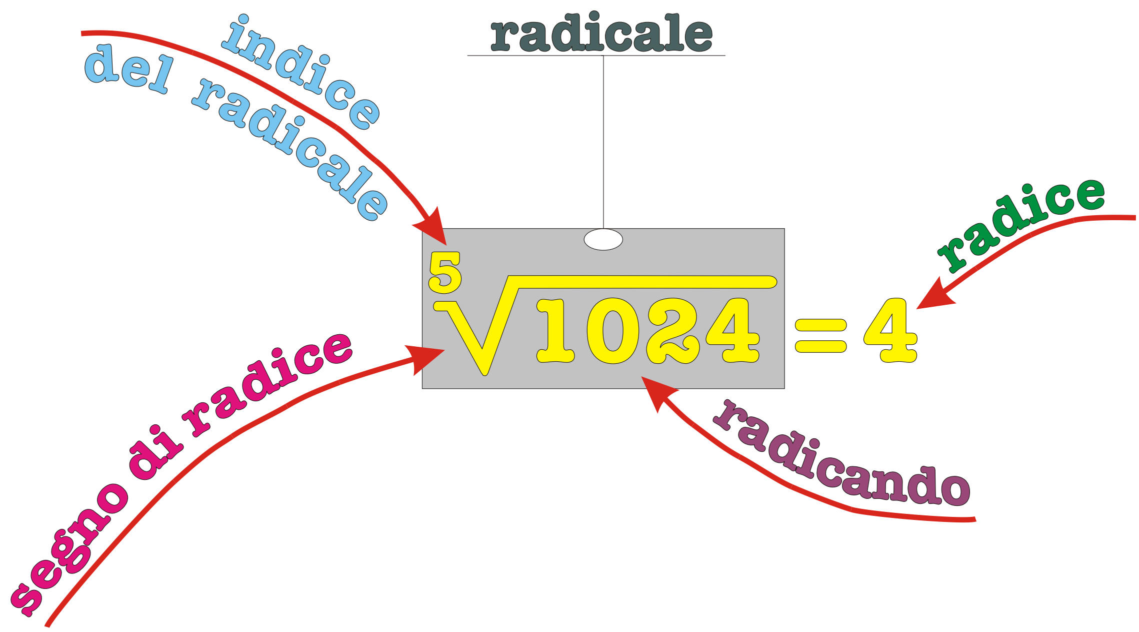
Definizioni

- Il procedimento per risolvere le equazioni con la base incognita si chiama **operazione di estrazione di radice**;
- il simbolo usato per indicare questa operazione è il **segno di radice:** $\sqrt{}$
- il numero a secondo membro dell'equazione va posto sotto il segno di radice e si dice **radicando**;
- l'esponente dell'equazione va posto sopra il segno di radice e si dice **indice del radicale**;
- il risultato dell'operazione è la **radice** del radicando;
- l'insieme formato dal segno di radice, dall'indice e dal radicando prende il nome di **radicale**.

In base a queste definizioni, diremo che:
per risolvere l'equazione dell'esercizio 2, si deve eseguire l'operazione di estrazione di radice, di indice 5, del radicando 1024.
E scriveremo in simboli così:

$$x^5 = 1024$$

$$x = \sqrt[5]{1024} = 4$$ la radice quinta di 1024 è 4



Sostituendo le lettere ai numeri si avrà la forma generale della figura 3.

$$\sqrt[n]{a} = b$$

a è la potenza ennesima di b

$a, b, n \in N$

Operazione di estrazione di radice in N

fig.3

Nella figura, $\sqrt[n]{a}$ è il radicale, la lettera a è il radicando, n è l'indice del radicale, b è la radice ennesima di a.

L'uguaglianza della figura 3 si legge così:

<< la radice ennesima di a è uguale a b >>

oppure: << la radice di indice n è uguale a b >>

Qualsiasi altro radicale si legge in modo analogo.

$\sqrt[4]{81}$ **si legge: << radice quarta di 81 >>**
oppure: << radice di indice 4 di 81 >>

$\sqrt[13]{8192}$ **si legge: << radice tredicesima di 8192 >>**
oppure: << radice di indice 13 di 8192 >>

Per gli indici 2 e 3 si usa anche la terminologia:
" radice quadrata " ; " radice cubica "

$\sqrt[2]{49}$ **si legge: << radice seconda di 49 >>**
oppure: << radice di indice 2 di 49 >>
o anche: << radice quadrata di 49 >>

$\sqrt[3]{512}$ **si legge: << radice terza di 512 >>**
oppure: << radice di indice 3 di 512 >>
o anche: << radice cubica di 512 >>

Esercizio 3
Estraete le radici dei seguenti numeri naturali.

$\sqrt[3]{216} =$; $\sqrt[5]{243} =$; $\sqrt[4]{1296} =$; $\sqrt[6]{4096} =$

Per eseguire questi calcoli possiamo fare ricorso alle corrispondenti equazioni e risolvere queste per tentativi.

1) $\sqrt[3]{216}$ l'equazione corrispondente è: $x^3=216$

Per cui estrarre la radice terza di 216 equivale a calcolare il numero che moltiplicato per sé stesso tre volte dà per risultato 216.

$$6 \cdot 6 \cdot 6 = 216 \Rightarrow \sqrt[3]{216} = 6$$

2) $\sqrt[5]{243}$ l'equazione corrispondente è: $x^5=243$

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243 \Rightarrow \sqrt[5]{243} = 3$$

3) $\sqrt[4]{1296}$ l'equazione corrispondente è: $x^4=1296$

$$6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[4]{1296} = 6$$

4) $\sqrt[6]{4096}$ l'equazione corrispondente è: $x^6=4096$

$$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4096 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[6]{4096} = 4$$

9.3 Quadrati perfetti, cubi perfetti

Esercizio 4
Estraete le radici quadrate.

$\sqrt[2]{49} =$; $\sqrt{121} =$; $\sqrt{5041} =$; $\sqrt{20} =$

1) $\sqrt[2]{49}$ l'equazione corrispondente è: $x^2=49$

$$7 \cdot 7 = 49 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[2]{49} = 7$$

Nelle radici quadrate l'indice 2 del radicale si suole omette, così come si è fatto qui di seguito.

2) $\sqrt{121}$ l'equazione corrispondente è: $x^2=121$

L'estrazione della radice quadrata di 121 si può seguire rapidamente utilizzando una tavola pitagorica.
Si osservi la tavola della figura 4 seguente.
I numeri della diagonale principale, di colore rosso, hanno una caratteristica particolare: sono il prodotto di due numeri uguali.

In questa diagonale c'è anche il radicando 121: esso si trova all'incrocio del rigo 11 con la colonna 11.
Dedurremo così che la radice quadrata di 121 è 11.

$$\sqrt{121} = 11$$

3) $\sqrt{5041}$ l'equazione corrispondente è: $x^2=5041$

Per calcolare rapidamente la radice quadrata di 5041 possiamo utilizzare le tavole numeriche.
Ma è ancora più semplice servirsi di una calcolatrice predisposta per l'esecuzione di tali calcoli.

$$\sqrt{5041} = 71$$

4) $\sqrt{20}$ l'equazione corrispondente è: $x^2=20$

Per calcolare la radice quadrata di 20 ci possiamo servire della tavola pitagorica della figura 4.
Cerchiamo il numero 20 sulla diagonale principale.
Poiché questo numero non c'è, concluderemo che non esiste alcun numero naturale che moltiplicato per sé stesso due volte dà per risultato 20.
Infatti valgono le relazioni:

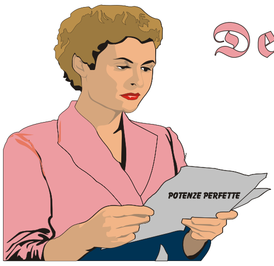
$$4^2=16 \quad ; \quad 5^2=25 \qquad \Rightarrow \qquad 4 < x < 5$$

Pertanto concluderemo dicendo:

- l'equazione $x^2=20$ non si può risolvere in N
- l'operazione $\sqrt{20}$ non si può eseguire in N

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	112	119	126	133	140
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	128	136	144	152	160
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153	162	171	180
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165	176	187	198	209	220
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180	192	204	216	228	240
13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195	208	221	234	247	260
14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210	224	238	252	266	280
15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180	195	210	225	240	255	270	285	300
16	32	48	64	80	96	112	128	144	160	176	192	208	224	240	256	272	288	304	320
17	34	51	68	85	102	119	136	153	170	187	204	221	238	255	272	289	306	323	340
18	36	54	72	90	108	126	144	162	180	198	216	234	252	270	288	306	324	342	360
19	38	57	76	95	114	133	152	171	190	209	228	247	266	285	304	323	342	361	380
20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300	320	340	360	380	400

fig.4



Definizioni

- Ogni numero naturale che si trova sulla diagonale principale della tavola pitagorica, ampliata illimitatamente, è un **quadrato perfetto**.
- La potenza terza di ogni numero naturale è un **cubo perfetto**.
- La potenza ennesima di ogni numero naturale è una **potenza ennesima perfetta**.

Esercizio 5
Estraete le radici cubiche.

$\sqrt[3]{64}=$; $\sqrt[3]{2197}=$; $\sqrt[3]{24389}=$; $\sqrt[3]{200}=$

Estrarre queste radici equivale a risolvere le corrispondenti equazioni con la base incognita.

1) $\sqrt[3]{64}$ ad essa corrisponde: $x^3=64$

Per estrarre la radice cubica di 64 in N, si deve calcolare qual è quel numero naturale che moltiplicato per sé stesso tre volte dà come risultato 64.

$$4\cdot4\cdot4=64 \Rightarrow \sqrt[3]{64}=4$$

Per fare più in fretta, anziché procedere per tentativi, si può ricavare il risultato o leggendolo sulle tavole numeriche o, più semplicemente, usando una calcolatrice programmata per questi calcoli.

2) $\sqrt[3]{2197}$ ad essa corrisponde: $x^3=2197$

$$13\cdot13\cdot13=2197 \Rightarrow \sqrt[3]{2197}=13$$

3) $\sqrt[3]{24389}$ ad essa corrisponde: $x^3=24389$

$$29\cdot29\cdot29=24389 \Rightarrow \sqrt[3]{24389}=29$$

4) $\sqrt[3]{200}$ ad essa corrisponde: $x^3=200$

Per il calcolo di questa radice è opportuno procedere per tentativi. Si constaterà così che non esiste alcun numero

intero che moltiplicato per sé stesso tre volte dà come risultato 200.
Si dedurrà anche che l'incognita dell'equazione è compresa tra 5 e 6:

$$5^3=125 \ ; \ 6^3=216 \quad \Rightarrow \quad 5<x<6$$

Poiché il numero naturale 200 non è un cubo perfetto, concluderemo questo esercizio dicendo:

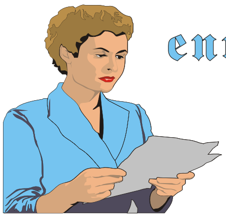
- l'equazione $x^3=200$ non è risolvibile in **N**
- l'operazione $\sqrt[3]{200}$ non si può eseguire in **N**

Poiché non ci è stato possibile estrarre alcune radici in N, dedurremo, in maniera più generale, che:

l'estrazione di radice ennesima è possibile in N solo se il radicando è una potenza ennesima perfetta.

Rivedendo il riquadro della fig.3, par.9.2, adesso sarà più evidente la condizione posta affinché la radice ennesima di un numero naturale sia ancora un numero naturale.

Poiché non è possibile eseguire sempre l'operazione di estrazione di radice in N, è valido il seguente



enunciato

L'estrazione di radice non è una legge di composizione interna dell'insieme N.

9.4 I numeri 0 e 1 nelle radici

Esercizio 6
Estraete le radici dei seguenti numeri naturali.

$$\sqrt[1]{5}= \ ; \quad \sqrt[1]{n}= \ ; \quad \sqrt[1]{0}= \ ; \quad \sqrt[1]{1}= \ ; \quad \sqrt[0]{5}= \ ;$$

$$\sqrt[0]{n}= \ ; \quad \sqrt[0]{1}= \ ; \quad \sqrt[0]{0}= \ ; \quad \sqrt[n]{1}= \ ; \quad \sqrt[n]{0}=$$

Per eseguire i calcoli di questo esercizio possiamo ricorrere alle corrispondenti equazioni.

1) $\sqrt[1]{5}$ l'equazione corrispondente è: $x^1=5$

$5^1=5 \Rightarrow \sqrt[1]{5}=5$

Ricordando quanto abbiamo detto nel paragrafo 6.5, riguardo alle potenze con esponente uguale ad 1, questo risultato si può generalizzare.
Infatti, sostituendo al radicando 5 un qualsiasi altro numero, si otterrà come risultato ancora il radicando.

Pertanto possiamo affermare:

L'estrazione di radice, di indice 1, dà come risultato il radicando.

Di conseguenza si avrà:

2) $\sqrt[1]{n}=n$ **3)** $\sqrt[1]{0}=0$ **4)** $\sqrt[1]{1}=1$

5) $\sqrt[0]{5}$ l'equazione corrispondente è: $x^0=5$

Ricordando ancora quanto abbiamo stabilito nel paragrafo 6.5, qualunque numero, elevato a 0, dà come risultato 1, per cui questa equazione è impossibile.
Si perverrà quindi alla conclusione:

$\sqrt[0]{5}=?$ non si può eseguire

Anche questo risultato si può generalizzare.
Infatti l'estrazione di radice è impossibile anche se si sostituisce al 5 un qualsiasi altro numero, diverso da 1.

6) $\sqrt[0]{n}=?$ non si può eseguire, per $n\neq1$

7) $\sqrt[0]{1}=?$ indeterminata, perché $x^0=1$ ha infinite soluzioni

8) $\sqrt[0]{0}=?$ non si può eseguire, perché $x^0=0$ è impossibile

9) $\sqrt[n]{1}$ l'equazione corrispondente è: $x^n=1$

$1^n=1 \Rightarrow \sqrt[n]{1}=1$ (per qualunque valore di n)

10) $\sqrt[n]{0}$ l'equazione corrispondente è: $x^n=0$

$0^n=0 \Rightarrow \sqrt[n]{0}=0 \quad (n\neq0)$

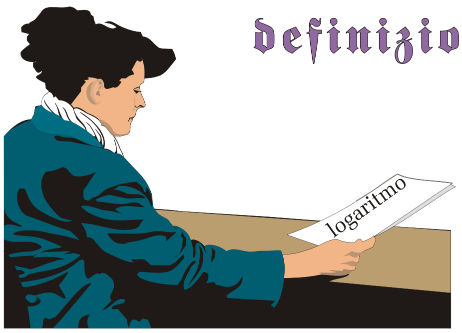
9.5 L'estrazione di logaritmo in N

Esercizio 7
Risolvete la seguente equazione.
$8^x = 32768$

Questa è una equazione con l'esponente incognito.
Per risolverla procederemo per tentativi, così come abbiamo fatto con la seconda equazione dell'esercizio 1.
Troveremo in questo modo che l'incognita vale 5.
Infatti:

$$8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 32768 \quad \Rightarrow \quad x = 5$$

Così come abbiamo fatto nel risolvere le equazioni con la base incognita, anche adesso dobbiamo cercare un simbolismo appropriato per indicare il procedimento risolutivo di questo tipo di equazioni.
A questo fine dobbiamo tenere conto delle seguenti



definizioni

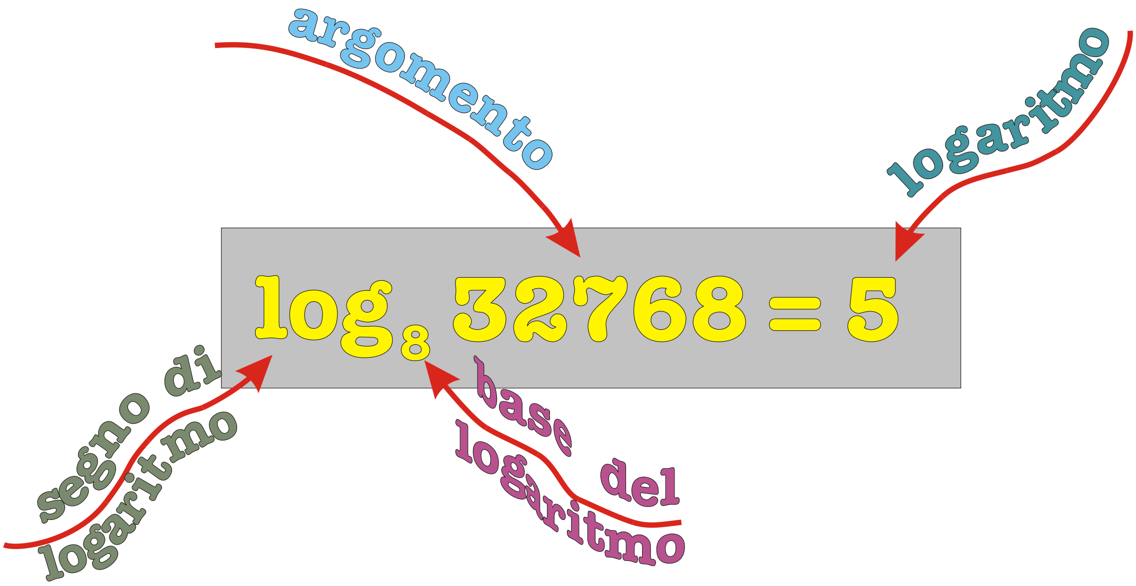
- Il procedimento risolutivo delle equazioni con l'esponente incognito si dice **operazione di estrazione di logaritmo**;
- il simbolo usato per indicare questa operazione è il **segno di logaritmo:** log
- il numero a secondo membro dell'equazione va posto accanto al segno di logaritmo e si dice **argomento del logaritmo**;
- la base dell'equazione va posta in basso, a destra del segno di logaritmo, e si dice **base del logaritmo**;
- il risultato dell'operazione si dice **logaritmo**.

Nel rispetto di queste definizioni, diremo che:
per risolvere l'equazione dell'esercizio 7, si deve eseguire l'operazione di estrazione di logaritmo, in base 8,

dell'argomento 32768.
Usando i simboli, scriveremo così:

$8^x=32768$

$x=\log_8 32768=5$ **il logaritmo in base 8 di 32768 è 5**



Sostituendo le lettere ai numeri si avrà la forma generale della figura 5.

$$\log_a b = c$$

b potenza di **a**

$a, b, c \in N$

Operazione di estrazione di logaritmo in N

fig.5

L'uguaglianza della figura 5 si legge così:

<< Il logaritmo in base a di b è uguale a c >>

Per leggere ogni altra espressione logaritmica si segue la stessa procedura.

$\log_7 343$ si legge: << logaritmo in base 7 di 343 >>

Esercizio 8
Estraete i logaritmi dei seguenti numeri naturali.
$\log_3 81=$; $\log_5 15625 =$; $\log_2 1024=$; $\log_4 45=$

Per eseguire questi calcoli possiamo ricorrere alle corrispondenti equazioni e risolverle per tentativi, così come abbiamo fatto prima.

1) $\log_3 81$ **ad essa corrisponde:** $3^x = 81$

Per cui dobbiamo calcolare quante volte è necessario moltiplicare il 3 per sé stesso per ottenere 81.

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81 \Rightarrow \log_3 81 = 4$$

2) $\log_5 15625$ **ad essa corrisponde:** $5^x = 15625$

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 15625 \Rightarrow \log_5 15625 = 6$$

3) $\log_2 1024$ **ad essa corrisponde:** $2^x = 1024$

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 1024 \Rightarrow \log_2 1024 = 10$$

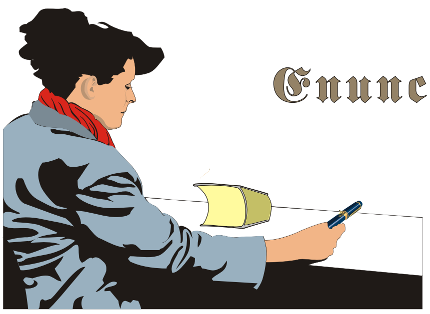
4) $\log_4 45$ **ad essa corrisponde:** $4^x = 45$

$$4 \cdot 4 = 16 \Rightarrow x > 2 \quad ; \quad 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64 \Rightarrow x < 3$$

Poiché: $2 < x < 3$ concluderemo dicendo:

- l'operazione $\log_4 45$ non si può eseguire in N
- l'equazione $4^x = 45$ è impossibile in N

Svolto l'esercizio, sarà chiaro che l'estrazione di logaritmo non è sempre possibile in N.
Infatti, affinché ciò accada, occorre che l'argomento sia una potenza della base. Si veda la figura 5.



Enunciato

L'estrazione di logaritmo non è una legge di composizione interna dell'insieme N.

9.6 Il logaritmo in base 10 in N

Esercizio 9
Estraete i seguenti logaritmi in base 10.

$\text{Log}_{10}1000$; $\text{Log}1.000.000$; $\text{Log}100.000.000$; $\text{Log}101.010$

Il logaritmo in base 10 è tra quelli che vengono usati nella pratica.
Esso si indica scrivendo la lettera iniziale a carattere maiuscolo e omettendo la base.
Eseguiamo i calcoli dell'esercizio 9.

1) L'equazione corrispondente di Log 1000 è $10^x=1000$

$$10\cdot10\cdot10=1000 \quad\Rightarrow\quad \text{Log }1000=3$$

Un modo molto semplice di calcolare il logaritmo in N è quello di scrivere l'argomento sotto forma di potenza, nel caso in cui ciò sia possibile.
L'esponente di tale potenza è il risultato cercato.

2) L'equazione corrispondente di Log 1.000.000 è $10^x=10^6$

$$1.000.000=10^6 \quad\Rightarrow\quad \text{Log}1.000.000=6$$

3) L'equazione corrispondente di Log100.000.000 è $10^x=10^8$

$$\text{Log}100.000.000 = \text{Log}10^8=8$$

4) L'equazione corrispondente di Log 101010 è $10^x=101010$

Questa volta però l'argomento non è una potenza di dieci.
Infatti:

$$10^5=100.000 \quad\Rightarrow\quad x>5$$
$$10^6=1.000.000 \quad\Rightarrow\quad x<6$$

Poiché: $5<x<6$ diremo che:

-l'equazione $10^x=101010$ è impossibile in N
-l'operazione $\text{Log }101010$ non si può eseguire in N

9.7 I numeri 0 e 1 nei logaritmi

Esercizio 10
Estraete i logaritmi dei seguenti numeri naturali.

$\log_1 9$; $\log_1 0$; $\log_1 a$; $\log_1 1$; $\log_0 4$; $\log_0 1$;
$\log_0 a$; $\log_0 0$; $\mathrm{Log}_n 1$; $\log_n 0$; $\log_{10} 10$; $\log_n n$

Per eseguire i calcoli ricorreremo alle corrispondenti equazioni.

$\log_1 9$ l'equazione corrispondente è: $1^x=9$

Quando la base è 1, qualunque sia l'esponente, il risultato della potenza è sempre 1, per cui si avranno questi risultati:

1) $\log_1 9 = ?$ non si può eseguire
2) $\log_1 0 = ?$ non si può eseguire
3) $\log_1 a = ?$ non si può eseguire per $a \neq 1$
4) $\log_1 1 = ?$ è indeterminata ($1^x=1$ ha infinite soluzioni)

$\log_0 4$ l'equazione corrispondente è: $0^x=4$

Quando la base è 0, per qualunque valore, diverso da zero, dell'esponente il risultato della potenza è 0, per cui si avranno questi risultati:

5) $\log_0 4 = ?$ non si può eseguire
6) $\log_0 1 = ?$ non si può eseguire
7) $\log_0 a = ?$ non si può eseguire per $a \neq 0$
8) $\log_0 0 = ?$ indeterminata ($0^x=0$ ha infinite soluzioni)

$\log_n 1$ l'equazione corrispondente è: $n^x=1$

La potenza di un qualsiasi numero diverso da 0 è uguale ad 1 quando l'esponente è 0.

9) per $n \neq 0$, $n^x=1 \Rightarrow x=0$ quindi: $\log_n 1=0$ $(n \neq 0)$

$\log_n 0$ l'equazione corrispondente è: $n^x=0$

Poiché l'equazione è impossibile per $n\neq 0$, ne seguirà:

10) $\log_n 0 = ?$ non si può eseguire

$\log_{10} 10$ l'equazione corrispondente è: $10^x=10$

Questa equazione è possibile soltanto se l'esponente della potenza è 1: $n^x=n \Rightarrow x=1$

Pertanto si avranno questi risultati:

11) $\log_{10} 10=1$ 12) $\log_n n=1$ per $n\neq 0;1$

Quando la base e l'argomento sono uguali, il risultato dell'estrazione di logaritmo è 1.

9.8 Espressioni ed equazioni in N

Esercizio 11

Eseguite i calcoli delle seguenti espressioni.

a) $\dfrac{14+26\cdot\sqrt{121}}{15}$ b) $\sqrt[3]{\dfrac{5072-\sqrt{169}\cdot 2^3}{2^4+\sqrt{28+3\cdot 7}}}$

a) Si devono eseguire, in ordine: l'estrazione di radice, la moltiplicazione, l'addizione e la divisione.

$$\frac{14+26\cdot\sqrt{121}}{15}=\frac{14+26\cdot 11}{15}=\frac{14+286}{15}=\frac{300}{15}=20$$

b) Le operazioni a numeratore e a denominatore vanno eseguite contemporaneamente; si esegue dopo la divisione tra i due risultati ottenuti; si estrae infine la radice terza del quoto.

$$\sqrt[3]{\frac{5072-\sqrt{169}\cdot 2^3}{2^4+\sqrt{28+3\cdot 7}}}=\sqrt[3]{\frac{5072-13\cdot 8}{16+\sqrt{49}}}=\sqrt[3]{\frac{4968}{16+7}}=\sqrt[3]{\frac{4968}{23}}=\sqrt[3]{216}=6$$

Esercizio 12
Eseguite i calcoli delle seguenti espressioni.

a) $3^4 \cdot \log_5 125-44$ b) $\text{Log}\left(\dfrac{\sqrt{81}+13^3+55433\cdot 18}{3\cdot 10^2-5\cdot 40}\right)$

a) Le operazioni di elevazione a potenza e di logaritmo si eseguono contemporaneamente.

$$3^4 \cdot \log_5 125-44=81\cdot 3-44=243-44=199$$

b) Le operazioni a numeratore e a denominatore si eseguono contemporaneamente; si esegue dopo la divisione tra i due risultati ottenuti; si estrae infine il logaritmo in base dieci del quoto.

$$\text{Log}\left(\frac{\sqrt{81}+13^3+55433\cdot 18}{3\cdot 10^2-5\cdot 40}\right)=\text{Log}\left(\frac{9+2197+997794}{3\cdot 100-200}\right)=$$

$$=\text{Log}\left(\frac{1.000.000}{300-200}\right)=\text{Log}\left(\frac{1.000.000}{100}\right)=\text{Log}\ 10000=4$$

Esercizio 13
Risolvete le seguenti equazioni.

$z^3+301=813$; $7\cdot 4^y=7168$; $456-2^x=328$; $\dfrac{w^5}{27}=9$

a) $x^3+301=813$ $x=\sqrt[3]{813-301}=\sqrt[3]{512}=8$

potenza ⟶ addizione ⟶ risultato

radice ⟵ sottrazione ⟵ risultato

Poiché l'incognita è la base, l'operazione inversa della potenza è l'estrazione di radice.

b) $7\cdot 4^y=7168$ $y=\log_4\left(\dfrac{7168}{7}\right)=\log_4 1024=5$

potenza ⟶ moltiplicazione ⟶ risultato

logaritmo ⟵ divisione ⟵ risultato

Poiché l'incognita è l'esponente, l'operazione inversa della potenza è l'estrazione di logaritmo.

c) $456-2^x=328$ $x=\log_2(456-328)=\log_2 128=7$

potenza ⟶ sottrazione ⟶ risultato

logaritmo ⟵ sottrazione ⟵ risultato

d) $\frac{w^5}{27}=9$ $w=\sqrt[5]{9\cdot 27}=\sqrt[5]{243}=3$

potenza ⟶ divisione ⟶ risultato

radice ⟵ moltiplicazione ⟵ risultato

Esercizio 14
Risolvete le seguenti equazioni.

$10000-13\cdot z^4=1875$; $\frac{5^x+375}{250}=64$; $\frac{315}{368-y^2}=45$

Queste equazioni sono più complesse delle precedenti perché sulle incognite influiscono più di due operazioni; tuttavia, con la pratica già acquisita, anche adesso sarà agevole determinare le espressioni risolventi.

a) $10000-13\cdot z^4=1875$ $z=\sqrt[4]{\frac{10000-1875}{13}}=\sqrt[4]{625}=5$

pot. ⟶ molt. ⟶ sottr. ⟶ risult.

div. ⟵ div. ⟵ sottr. ⟵ risult.

b) $\frac{5^x+375}{250}=64$ $x=\log_5(64\cdot 250-375)=\log_5 15.625=6$

pot. ⟶ add. ⟶ div. ⟶ risult.

log. ⟵ sottr. ⟵ molt. ⟵ risult.

c) $\frac{315}{368-y^2}=45$ $y=\sqrt{368-\frac{315}{45}}=\sqrt{368-7}=\sqrt{361}=19$

pot. ⟶ sottr. ⟶ div. ⟶ risult.

rad. ⟵ sottr. ⟵ div. ⟵ risult.

Esercizio 15
Risolvete le seguenti equazioni.

$$\frac{51\cdot 6^{x}+72}{53}=36 \quad ; \quad \frac{15387-3\cdot z^{3}}{9}=1266 \quad ; \quad \frac{247000}{25\cdot y^{3}+200}=19$$

a) $$x=\log_{6}\left(\frac{36\cdot 53-72}{51}\right)=\log_{6}\left(\frac{183}{51}\right)=\log_{6}36=2$$

pot. → molt. → add. → div. → risult.
log. ← div. ← sottr. ← molt. ← risult.

$$z=\sqrt[3]{\frac{15.387-9\cdot 1.266}{3}}=\sqrt[3]{\frac{15.387-11.394}{3}}=\sqrt[3]{\frac{3993}{3}}=\sqrt[3]{1331}=11$$

pot. → molt. → sottr. → div. → risult.
rad. ← div. ← sottr. ← molt. ← risult.

$$y=\sqrt[3]{\frac{\frac{247000}{19}-200}{25}}=\sqrt[3]{\frac{13000-200}{25}}=\sqrt[3]{512}=8$$

pot. → molt. → add. → div. → risult.
rad. ← div. ← sottr. ← div. ← risult.

9.9 Equazioni letterali

Esercizio 16
Risolvete le seguenti equazioni letterali.

$$a-b\cdot c^{y}=p \quad ; \quad \frac{a+b}{c+x}=n \quad ; \quad a+\frac{b\cdot w^{7}}{c}=m$$

$$y=\log_{c}\left(\frac{a-p}{b}\right)$$

pot. → molt. → sottr. → ris.
log. ← div. ← sottr. ← ris.

$x = \dfrac{a+b}{n} - c$

add. ⟶ div. ⟶ ris.

sottr. ⟵ div. ⟵ ris.

In questa equazione l'operazione di addizione a numeratore non influisce sull'incognita per cui non si deve considerare tra le operazioni dirette; essa si riporta senza variazioni nell'espressione risolvente.

$w = \sqrt[7]{\dfrac{(m-a)\cdot c}{b}}$

pot. ⟶ molt. ⟶ div. ⟶ add. ⟶ ris.

rad. ⟵ div. ⟵ molt. ⟵ sottr. ⟵ ris.

Esercizio 17
Risolvete le equazioni rispetto a ciascuna lettera.

$$\frac{a\cdot b - c^n}{m} = p$$

$a = \dfrac{p\cdot m + c^n}{b}$

molt. ⟶ sottr. ⟶ div. ⟶ ris.

div. ⟵ add. ⟵ molt. ⟵ ris.

$b = \dfrac{p\cdot m + c^n}{a}$

Lo schema è identico al precedente.

$c = \sqrt[n]{a\cdot b - m\cdot p}$

pot. ⟶ sottr. ⟶ div. ⟶ ris.

rad. ⟵ sottr. ⟵ molt. ⟵ ris.

$n = \log_c(a\cdot b - m\cdot p)$

pot. ⟶ sottr. ⟶ div. ⟶ ris.

log. ⟵ sottr. ⟵ molt. ⟵ ris.

$m = \dfrac{a\cdot b - c^n}{p}$

Si permuta la m con la p.

L'unica operazione che influisce sulla lettera m è la divisione; pertanto l'espressione risolvente si ottiene applicando la proprietà dell'invertire della divisione, cioè scambiando di posto la m con la p.

9C

OPERAZIONI DI ESTRAZIONE DI RADICE E DI LOGARITMO IN N

Esercizi e Complementi

9.1C Le equazioni in N

Esercizio 18
Calcolate quali numeri naturali si devono sostituire alle incognite affinché si verifichino le uguaglianze.

a) $x^2=9$; $y^2=4$; $z^2=100$; $w^2=25$

b) $3^x=27$; $8^y=64$; $6^z=216$; $10^w=100$

c) $x^3=125$; $8^w=4096$; $z^5=243$; $2^y=512$

Esercizio 19
Risolvete le seguenti equazioni.

a) $x^4=10000$; $y^3=343$; $z^5=3125$; $w^2=529$

b) $7^x=16807$; $8^y=4096$; $3^z=59049$; $2^w=2048$

c) $21^y=9261$; $w^3=2197$; $17^x=83521$; $z^4=1296$

Esercizio 20
Rispondete alle seguenti domande.
- Cos'è una equazione?
- Cosa significa risolvere una equazione in N?
- Quando l'operazione diretta è la potenza, è necessario stare attenti al posto in cui si trova l'incognita? Perché? Quali equazioni si ottengono con questa operazione?

Esercizio 21
Osservate i riquadri delle figure 1 e 2, par. 9.1, e spiegate il significato dei simboli.
Di che tipo sono le equazioni rappresentate?
Quale operazione è presente in ciascuna equazione?

Esercizio 22
Osservate i riquadri delle figure 1 e 2, par. 9.1, e rispondete alle seguenti domande.
E'sufficiente la condizione: $a,b \in N$ per potere concludere che anche le incognite sono numeri naturali?
Sapreste dire quali sono le condizioni necessarie, affinché queste equazioni siano risolvibili in N ?

Esercizio 23
Date la definizione di equazione risolvibile in N.
Osservate i riquadri delle figure 1 e 2, paragrafo 9.1.
Sapreste dire quali sono le condizioni necessarie affinché l'equazione con la base incognita sia risolvibile in N? E quali quelle per l'equazione con l'esponente incognito?

Esercizio 24
Dite quali delle seguenti equazioni non sono risolvibili in N e perché.

$x^3=80$; $31^y=2000$; $z^5=243$; $7^w=2401$; $10^k=3003$

9.2C L'estrazione di radice in N

Esercizio 25
Risolvete per tentativi le seguenti equazioni con la base incognita.

a) $x^2=121$; $y^3=125$; $z^4=2401$; $w^5=243$
b) $x^3=729$; $y^6=729$; $z^4=625$; $w^5=161051$

Esercizio 26
Definite l'operazione di estrazione di radice.
Con quale segno si rappresenta questa operazione?
Cos'è l'indice del radicale? E il radicando?

Esercizio 27
Dite cosa rappresenta l'uguaglianza: $\sqrt[n]{a}=b$.
Qual è il radicale? e il radicando? quale l'indice del radicale? quale la radice?
Quali condizioni si devono porre affinché questa uguaglianza si possa verificare in N ?

Esercizio 28
Cosa rappresenta il segno di radice?
Come si chiama il risultato dell'estrazione di radice?
E come si chiamano i numeri posti sopra e sotto il segno di radice?

Esercizio 29
Leggete i seguenti radicali, poi estraete le radici con l'uso di una calcolatrice.

$\sqrt[6]{64}$; $\sqrt[5]{243}$; $\sqrt[2]{169}$; $\sqrt[4]{1296}$; $\sqrt[3]{1728}$; $\sqrt[7]{2187}$

Esercizio 30
Scrivete in simboli i radicali:
- radice quarta di diecimila;
- radice, di indice 13, di ottomilacentonovantadue;
- radice quadrata di centoventuno;
- radice cubica di duemilacentonovantasette;
- radice terza di centoventicinque;
- radice quinta di trentadue.

Esercizio 31
Risolvete le equazioni con base incognita, rappresentando con i simboli appropriati le operazioni eseguite.

$x^3=1331$; $y^4=81$; $w^5=32$; $z^6=729$; $k^7=10.000.000$

Esercizio 32
Risolvete le seguenti equazioni con l'aiuto della calcolatrice e rappresentate con i simboli appropriati le operazioni eseguite.

$x^4=20736$; $y^5=537824$; $z^3=50635$; $w^6=531441$

Esercizio 33
Estraete le radici dei seguenti radicali.

$\sqrt[6]{729}$; $\sqrt[5]{1024}$; $\sqrt[2]{196}$; $\sqrt[4]{2401}$; $\sqrt[3]{2197}$; $\sqrt[7]{2187}$

Esercizio 34
Estraete le radici con l'uso della calcolatrice.

$\sqrt[4]{83.521}$; $\sqrt[5]{6.436.343}$; $\sqrt[8]{5.764.801}$; $\sqrt[6]{24.137.569}$

Esercizio 35
Estraete le radici dei seguenti radicali.

$\sqrt[4]{160.000}$; $\sqrt[5]{100000}$; $\sqrt[3]{27.000}$; $\sqrt[6]{1.000.000}$

$\sqrt[8]{100.000.000}$; $\sqrt[7]{10.000.000}$; $\sqrt[3]{8.000}$; $\sqrt[9]{1.000.000.000}$

9.3C Quadrati perfetti, cubi perfetti

Esercizio 36
Estraete le radici quadrate, facendo i calcoli a mente.
$\sqrt{4}$; $\sqrt{9}$; $\sqrt{36}$; $\sqrt{81}$; $\sqrt{25}$; $\sqrt{16}$; $\sqrt{49}$

Esercizio 37
Spiegate quali sono le caratteristiche della tavola pitagorica. E' simmetrica? Rispetto a cosa?
Qual è la diagonale principale? Che caratteristica ha?

Esercizio 38
Risolvete le seguenti equazioni, utilizzando la tavola pitagorica della figura 4, paragrafo 9.3. Indicate con i simboli appropriati le operazioni eseguite.
$x^2=144$; $y^2=225$; $w^2=289$; $z^2=361$

Esercizio 39
Spiegate quali numeri naturali si dicono quadrati perfetti e perché.
Osservando la tavola pitagorica della figura 4, paragrafo 9.3, dite dove si trovano i quadrati perfetti.

Esercizio 40
Dite quali dei seguenti numeri naturali sono dei quadrati perfetti e perché.
4; 1; 9; 7; 100; 25; 81; 121; 50; 1000; 2500; 400; 47

Esercizio 41
Stabilite quali delle seguenti estrazioni di radice non si possono eseguire in N.
$\sqrt{324}$; $\sqrt{256}$; $\sqrt{50}$; $\sqrt{8}$; $\sqrt{100}$; $\sqrt{200}$

Esercizio 42
Estraete le seguenti radici quadrate, utilizzando una calcolatrice.
$\sqrt{441}$; $\sqrt{1369}$; $\sqrt{6561}$; $\sqrt{103.041}$; $\sqrt{40.401}$

Algoritmo dell'estrazione di radice quadrata

Per estrarre la radice quadrata si può seguire l'algoritmo descritto qui di seguito con due esempi.

Estraiamo le radici quadrate.

a) $\sqrt{299209}$

b) $\sqrt{9421802}$

1) Si separano le cifre del radicando a gruppi di due, procedendo da destra verso sinistra.

a) 29'92'09

La prima coppia di cifre forma il numero 29.

b) 9'42'18'02

A primo posto rimane soltanto la cifra 9.

2) Si tracciano delle linee di separazione.

a) $\sqrt{29'92'09}$ |

b) $\sqrt{9'42'18'02}$ |

3) Si estrae la radice del primo gruppo di cifre, approssimando eventualmente il calcolo per difetto.

a) $5^2 < 29 < 6^2$

b) $3^2 = 9$

4) Il risultato si pone in alto a destra, nello spazio creato appositamente.

a) $\sqrt{29'92'09}$ | 5

b) $\sqrt{9'42'18'02}$ | 3

5) Si calcola la differenza tra il primo gruppo di cifre e il quadrato della sua radice.

a)

$\sqrt{29'92'09}$	5
25	
4	

b)

$\sqrt{9'42'18'02}$	3
9	
0	

6) Si abbassa la seconda coppia di cifre, staccando l'ultima con un punto.

a)

$\sqrt{29'92'09}$	5
25	
49'2	

b)

$\sqrt{9'42'18'02}$	3
9	
04'2	

7) Si moltiplica per 2 il numero che abbiamo posto in alto a destra e se ne scrive il prodotto nello spazio sottostante.

a)

$\sqrt{29'92'09}$	5
25	10
49'2	

b)

$\sqrt{9'42'18'02}$	3
9	6
04'2	

8) Si divide il numero in basso a sinistra, privo però della sua ultima cifra, per questo prodotto.

a) 49:10=4

b) 4:6=0

9) Questo quoziente va aggiunto alle cifre del numero scritto a destra in basso.

√29'92'09	5
25	104
49'2	

√9'42'18'02	3
9	60
04'2	

10) Il numero che si forma si deve moltiplicare per la stessa cifra che è stata aggiunta.

√29'92'09	5
25	104x4=416
49'2	

√9'42'18'02	3
9	60x0=0
04'2	

11) Il prodotto così ottenuto si deve sottrarre al numero in basso a sinistra, senza la separazione della sua ultima cifra.

√29'92'09	5
25	104x4=416
492-	
416	
76	

√9'42'18'02	3
9	60x0=0
042-	
0	
42	

12) Se la sottrazione è possibile, la cifra che prima è stata aggiunta a destra in basso, va aggiunta anche alle cifre del numero scritto sopra.

√29'92'09	54
25	104x4=416
492-	
416	
76	

√9'42'18'02	30
9	60x0=0
042-	
0	
42	

13) Si abbassano le due cifre della terza coppia, aggiungendoli alla differenza.
Dal numero che si forma, si stacca l'ultima cifra.

Da ora in poi si ripetono ciclicamente gli stessi passaggi descritti dal punto 6 al punto 12.
Applichiamoli, continuando ad estrarre le due radici.

13a) Proseguiamo con l'estrazione di radice di 299209:

- Si moltiplica 54 per 2.
- Si scrive il prodotto 108 nello spazio sottostante.
- Si divide 760 per 108.
- Il quoziente 7 si aggiunge alle cifre di 108, formando così il numero 1087.
- Si moltiplica 1087 per 7.
- Si sottrae il prodotto da 7609.
- Poiché la sottrazione è possibile, il 7 si scrive come terza cifra della radice.
- Non essendoci altre cifre da abbassare, il procedimento ha termine.
- L'ultima differenza calcolata si dice resto dell'estrazione di radice.

√29'92'09	547
25	104X4=416
49'2	1087X7=7609
416	
760'9	
7609	
0000	

resto

$547^2=299209$

547 è la radice di 299209.
Poiché il resto è 0, 299209 è un quadrato perfetto.

13b) Completiamo l'estrazione di radice di 9421802:

Passaggi ciclici

- Si abbassa 18 e si stacca la cifra 8 dal numero 4218 che si forma.
- Si moltiplica 30 per 2 e il prodotto 60 si scrive nello spazio sottostante.
- Si divide 421 per 60.
- Il quoziente 7 si aggiunge alle cifre di 60; si forma così il numero 607.
- Si moltiplica 607 per lo stesso 7 che è stato aggiunto e si ricava il prodotto 4249.
- Poiché questo prodotto è maggiore del sottraendo 4218, il 7 non va bene, si deve diminuire di una unità: al suo posto si mette 6.
- Questa volta il prodotto 3636 è minore del minuendo, per cui il 6 va bene e si aggiunge come terza cifra della radice.
- Si sottrae 3636 da 4218.

```
√ 9'42'18'02 | 306
  9          |------------
  04'2       | 60X0=0
   0         | ~~607X7=4249~~
   421'8     | 606X6=3636
   3636      |
    582      |
```

Ricomincia il ciclo

- Si abbassa il quarto gruppo di cifre e unendolo alla differenza 582 si forma il numero 58202.
- Da questo si stacca l'ultima cifra con un punto.
- Si raddoppia 306 e se ne scrive il prodotto 612 nello spazio sottostante.
- Si divide 5820 per 612.
- Il quoziente 9 si aggiunge alle cifre di 612 e si forma il numero 6129.
- Si moltiplica 6129 per lo stesso 9.
- Il prodotto ottenuto 55161 si sottrae da 58202.
- Poiché è stato possibile eseguire la sottrazione, il 9 va bene e vale come quarta cifra della radice.

Non essendoci altre cifre da abbassare il procedimento ha termine.

```
√ 9'42'18'02 | 3069
  9          |------------
  04'2       | 60X0=0
   0         | ~~607X7=4249~~
   421'8     | 606X6=3636
   3636      | 6129X9=55161
    5820'2   |
    55161    |
     3041    |
   resto
```

3069 è la radice di 9421802, ma, dato che il resto è diverso da zero, è una radice approssimata per difetto.

Per ogni estrazione di radice vale l'uguaglianza:

$\boxed{\text{radicando} = \text{radice al quadrato} + \text{resto}}$

Nel nostro caso, si ha: $9421802=3069^2+3041$

Esercizio 43

Estraete le radici quadrate dei seguenti radicali, mediante l'algoritmo descritto sopra.

a) $\sqrt{289}$; $\sqrt{449}$; $\sqrt{1156}$; $\sqrt{2057}$

b) $\sqrt{10609}$; $\sqrt{875241}$; $\sqrt{7108046}$; $\sqrt{5041852036}$

Esercizio 44
Estraete le radici cubiche.

$\sqrt[3]{27}$; $\sqrt[3]{8}$; $\sqrt[3]{729}$; $\sqrt[3]{125}$; $\sqrt[3]{512}$; $\sqrt[3]{64}$; $\sqrt[3]{343}$; $\sqrt[3]{216}$

Esercizio 45
Risolvete le seguenti equazioni, indicando con i simboli appropriati le operazioni eseguite.

$x^3=1000$; $y^3=2197$; $w^3=3375$; $z^3=4913$; $k^3=8000$

Esercizio 46
Quali numeri si dicono cubi perfetti?

Esercizio 47
Stabilite quali dei seguenti numeri naturali sono dei cubi perfetti, motivando le risposte.

8; 1; 27; 1000; 25; 81; 1331; 30; 3000; 125; 800; 6859

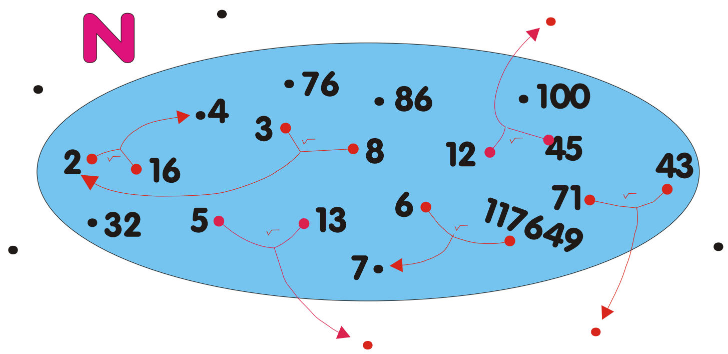
Esercizio 48
Estraete le radici cubiche seguenti, servendovi di una calcolatrice.

$\sqrt[3]{15.625}$; $\sqrt[3]{50.653}$; $\sqrt[3]{68.921}$; $\sqrt[3]{9.800.344}$; $\sqrt[3]{147.197.952}$

Esercizio 49
L'estrazione di radice è una operazione interna di N?
Quali delle seguenti estrazioni di radice non si possono eseguire in N ?

$\sqrt[3]{30}$; $\sqrt[3]{8}$; $\sqrt[3]{1728}$; $\sqrt[3]{125}$; $\sqrt[3]{4096}$; $\sqrt[3]{64}$; $\sqrt[3]{216}$

L'insieme N non è chiuso rispetto all'operazione di estrazione di radice



Non è una legge di composizione interna di N

Il grafico mostra che l'estrazione di radice non è sempre possibile in N

Esercizio 50
Completate la tavola numerica.
- Nella prima colonna sono elencati i numeri naturali in successione;
- nella seconda colonna e nella terza si devono elencare rispettivamente i quadrati e i cubi di ciascun numero naturale della prima colonna.

n	n^2	n^3		n	n^2	n^3
0				30		
1				31		
2	4	8		32		
3				33		
4				34		
5	25	125		35		42875
6				36		
7				37		
8				38		
9				39		
10				40		
11				41		
12				42		
13				43		
14				44		
15				45		
16				46		
17				47		
18				48		
19				49		
20				50	2500	
21				51		
22				52		
23				53		
24				54		
25				55		
26				56		
27				57		
28				58		
29				59		

9.4C I numeri 0 e 1 nelle radici

Esercizio 51
Estraete le seguenti radici.

$\sqrt[1]{15}$; $\sqrt[1]{0}$; $\sqrt[0]{35}$; $\sqrt[0]{1}$; $\sqrt[0]{0}$; $\sqrt[1]{1}$;
$\sqrt[1]{41}$; $\sqrt[0]{a}$; $\sqrt[a]{1}$; $\sqrt[b]{0}$

Esercizio 52
Risolvete le equazioni, indicando con i simboli appropriati le operazioni eseguite.

$x^3=1$; $y^1=25$; $w^1=0$; $z^1=61$; $k^n=1$; $v^1=c$

Esercizio 53
Risolvete le equazioni, indicando con i simboli appropriati le operazioni eseguite.

$x^3=0$; $y^0=25$; $w^0=0$; $z^0=1$; $k^n=0$; $v^0=c$

Esercizio 54
Quale radice si ottiene se l'indice del radicale è 1?
Quale se l'indice è 0?
Quale se l'indice è 0 e il radicando è 1?
Quale se il radicando è 1?
Quale se il radicando è 0?

Esercizio 55
Esiste l'elemento neutro per l'estrazione di radice?
Per quali operazioni, tra quelle studiate, esiste?

Esercizio 56
Dite quali delle seguenti uguaglianze sono vere.

$\sqrt[1]{5} = \sqrt[5]{1}$; $\sqrt[0]{8} = \sqrt[8]{0}$; $\sqrt[3]{1} = \sqrt[5]{1}$

Nelle estrazioni di radice il numero 1 non influisce nei calcoli quando è l'indice; il risultato che si ottiene è uguale al radicando.
Tuttavia non è l'elemento neutro per l'estrazione di radice nell'insieme N, perché questa operazione non ha la proprietà commutativa.
Infatti, $\sqrt[1]{n} = n$ mentre $\sqrt[n]{1} = 1$ $(n \neq 1)$

9.5C L'estrazione di logaritmo in N

Esercizio 57
Risolvete le seguenti equazioni con l'esponente incognito per tentativi.

$2^x=32$; $4^y=64$; $3^z=243$; $6^w=1296$

Esercizio 58
Definite l'operazione di estrazione di logaritmo.
Con quale simbolo si rappresenta questa operazione?
Cos'è la base del logaritmo?
E cosa l'argomento?

Esercizio 59
Dite che cosa rappresenta l'uguaglianza: $\log_n a=b$.
Qual è l'argomento? quale la base del logaritmo? quale il logaritmo?
Quali condizioni si devono porre affinché questa uguaglianza si possa verificare in N ?

Esercizio 60
Cosa rappresenta il segno di logaritmo?
Come si chiama il risultato dell'estrazione di logaritmo?
Come si chiama il numero in basso al segno di logaritmo?
Come si chiama il numero accanto al segno di logaritmo?

Esercizio 61
Leggete le seguenti espressioni.

$\log_3 243$; $\log_2 1024$; $\log_5 390625$; $\log_{21} 9261$; $\log_7 823543$

Esercizio 62
Scrivete in simboli le seguenti proposizioni.
- logaritmo in base tre di settecentoventinove;
- logaritmo in base otto di quattromilanovantasei;
- logaritmo in base due di cinquecentododici;
- logaritmo in base cinque di settantottomilacentoventicinque.
- logaritmo in base dieci di milletrecentoventisette.

Esercizio 63
Risolvete le seguenti equazioni con l'esponente incognito, rappresentando con i simboli appropriati le operazioni eseguite.

$3^x=81$; $6^y=7776$; $2^w=512$; $5^z=125$; $7^k=2401$

Esercizio 64
Risolvete le seguenti equazioni con l'aiuto della calcolatrice. Rappresentate con i simboli appropriati le operazioni eseguite.

$12^x=248.832$; $32^y=33.554.432$; $341^z=39.651.821$; $7^w=5764801$

Esercizio 65
Estraete i seguenti logaritmi.

$\log_3 9$; $\log_2 4$; $\log_4 16$; $\log_6 36$; $\log_5 25$; $\log_2 8$; $\log_3 27$

Esercizio 66
Estraete i seguenti logaritmi.

$\log_4 4096$; $\log_2 32768$; $\log_3 59049$; $\log_6 50$; $\log_5 3125$

Esercizio 67
Eseguite i calcoli con l'uso della calcolatrice.

$\log_{20} 3.200.000$; $\log_{17} 1.419.857$; $\log_7 5.764.801$; $\log_9 43.046.721$

Esercizio 68
L'estrazione di logaritmo è una operazione interna dell'insieme N ? E la potenza ?
Stabilite quali dei seguenti logaritmi non si possono estrarre in N.

$\log_2 128$; $\log_7 337$; $\log_3 145$; $\log_9 729$; $\log_5 557$; $\log_6 216$

9.6C IL logaritmo in base 10 in N

Esercizio 69
Estraete i seguenti logaritmi in base dieci.

Log100 ; Log1.000 ; Log10.000 ; Log1.000.000 ; Log100.000 ;
Log10 ; Log1 ; Log0 ; Log1.000.000.000 ; Log40.000.000

Esercizio 70
Risolvete le equazioni, indicando con i simboli appropriati le operazioni eseguite.

$10^x=100$; $10^y=10.000.000$; $10^z=10$; $10^k=0$; $10^w=1$

Esercizio 71
Stabilite quali delle seguenti equazioni non sono possibili in N.
Risolvete quelle possibili, indicando coi simboli appropriati le operazioni che si devono eseguire.

$10^x=200$; $10^y=100.000.000$; $10^z=10010$; $10^k=10$; $10^w=361$

Esercizio 72
Stabilite quali delle seguenti operazioni non si possono eseguire in N. Calcolate quelle possibili.

$\text{Log}100.000$; $\text{Log}111.000$; $\text{Log}10^7$; $\text{Log}7^{10}$; $\text{Log}10^0$

9.7C I numeri 0 e 1 nei logaritmi

Esercizio 73
Estraete i logaritmi.

$\log_1 35$; $\log_1 0$; $\log_1 a$; $\log_1 1$; $\log_0 43$; $\log_0 a$; $\log_0 0$
$\log_{23} 23$; $\log_a 1$; $\log_a 0$; $\text{Log}\,1$; $\log_b b$

Esercizio 74
Risolvete le equazioni indicando con i simboli appropriati le operazioni eseguite.

$31^x=1$; $58^y=58$; $1^w=1$; $0^z=0$; $37^k=1$; $10^v=10$

Esercizio 75
Quale risultato si ottiene se la base del logaritmo è 1?
Quale se la base è 0?
Quale se l'argomento è 0 e la base è diversa da 0?
Quale se l'argomento è 1 e la base è diversa da zero?
Quale se l'argomento e la base sono uguali?
Quale se l'argomento e la base sono uguali ad 1 o a 0?

9.8C Espressioni ed equazioni in N

Esercizio 76

Eseguite i calcoli delle espressioni.

a) $\dfrac{40+62\cdot\sqrt{169}}{94}$; $\dfrac{37\cdot68-\sqrt{225}+19}{630}$; $\sqrt{815-671}+72-\sqrt{400}$

b) $\dfrac{77\cdot13-\sqrt[3]{27}\cdot19}{59}$; $\dfrac{\sqrt[4]{250\cdot40}+\sqrt[3]{125}-15}{359}$; $9\cdot\sqrt{17\cdot23-327}$

Esercizio 77

Eseguite i calcoli delle espressioni.

a) $11\cdot\sqrt[3]{65+23\cdot31+222}$; $\sqrt[3]{\dfrac{8372-3404}{16+49-42}}$; $\sqrt[3]{\dfrac{8\cdot72-520}{4^2+4\cdot3^2-45}}$

b) $\sqrt[4]{81}\cdot\sqrt[3]{327-6\cdot5^2\cdot2}-3^2$; $\sqrt[5]{32}\cdot\sqrt[3]{(3\cdot6^2-10^2)\cdot5^2+2^3\cdot10^2}$

Esercizio 78

Eseguite i calcoli delle seguenti espressioni.

a) $\sqrt[5]{100.000}+\sqrt[4]{81}+\sqrt[3]{343}-\sqrt[2]{196}$ [6]

b) $\sqrt{\dfrac{9\cdot8-2\cdot3^2}{6}\cdot\dfrac{[12-(45-5\cdot\sqrt{49})]^2\cdot21}{14}-\dfrac{13\cdot2^4}{52}}$ [14]

Esercizio 79

Eseguite i calcoli delle espressioni.

a) $\sqrt[3]{\dfrac{160-\sqrt{121}\cdot2^3}{2^2\cdot5-\sqrt{226-15\cdot7}}}$; $\sqrt[4]{\dfrac{358-5^2\cdot\sqrt[3]{216}}{5+\sqrt{226-5^3-37}}}$ [2;2]

b) $\sqrt{34\cdot12+\sqrt[3]{343}+26}+\sqrt{37\cdot27+\sqrt[3]{512}-46}-\sqrt{7\cdot9+\sqrt[3]{64}+14}$ [43]

c) $\sqrt[6]{\dfrac{(124+15^2+21\cdot31)^2}{7^3+76+5^4-1043}}+\dfrac{\sqrt{69\cdot(2776-64\cdot43)-1431}}{\sqrt[3]{7\cdot9+(64-14)-86}}$ [15]

d) $\sqrt{\{12\cdot[3900-(23+56\cdot69)]+77\}-(115-78)}$ [14]

e) $\sqrt[5]{\{(97\cdot55-5^4)-[7000-(34+36\cdot51)-423]\}\cdot(300-6\cdot47+63)}$ [3]

Esercizio 80
Eseguite i calcoli delle espressioni.

a) $437+\log_3 81-16\cdot 9$; $\log_5(59\cdot 43-1912)$

b) $(\log_6 1296+\log_7 343)\cdot\log_8 64$; $10\cdot(47+\log_2 16)-\log_4 64$

Esercizio 81
Eseguite i calcoli delle espressioni.

a) $\dfrac{67\cdot\log_6 7776+281}{\log_5 125+\log_4 1024}$; $\dfrac{26\cdot\log_3 2187+225}{\log_2 128+\log_6 1296}$ [77;37]

b) $\log_2\left(\dfrac{896-4^3\cdot 9+3392}{77+34\cdot 23-830}\right)$; $\log_3\left(\dfrac{109\cdot 6^2-5^3\cdot 3^2+6192}{78+4^4\cdot 3^3-6953}\right)$ [7;5]

Esercizio 82
Eseguite i calcoli delle espressioni.

a) $\log_4\dfrac{9515-[303+(7^3\cdot 6-17^2)+19]}{408+13^2-548}$ [4]

b) $\log_5\dfrac{\{7905-[(27+5^2\cdot 7)\cdot 5+37]\}+(7003-4986)}{3608+18^2-(432+64)-3365}$ [3]

Esercizio 83
Eseguite i calcoli delle espressioni.

a) $\dfrac{\log_7(67\cdot 56-1351)\cdot\log_7(83\cdot 5-72)\cdot\sqrt{25}}{\log_7(45\cdot 38+15097)}$ [12]

b) $\dfrac{\log_8(5^3+14^2+191)+\log_8[5449-(24^2+37\cdot 21)]+9}{\sqrt{85+8^3-533}+\sqrt[4]{[234600-(47\cdot 8^4+132)]-(16656+21204)}}$ [1]

Esercizio 84
Risolvete le equazioni.

a) $x^3+725=733$; $17\cdot 5^y=2125$; $896-2^z=864$; $\dfrac{w^3}{27}=1$

b) $x-172+605=722$; $4^y-2091=2005$; $z^3-98=118$; $\dfrac{10^3}{w^2}=10$

Esercizio 85
Risolvete le equazioni.

a) $x\cdot 41+656=4182$; $y^5+68=100$; $3^z+829=1558$; $\dfrac{w^3}{25}+8=13$

b) $x-325+555=855$; $y+981-445=18045$; $\dfrac{1036}{w}+56=93$

Esercizio 86
Risolvete le equazioni.

a) $x^3-825=175$; $9^y-4098=2463$; $896-z^4=271$

b) $571\cdot x-20178=10085$; $84477-209\cdot y=71728$

c) $\frac{x}{778}-872=277$; $\frac{28985}{y}-105=422$

d) $\frac{23392}{z-396}=344$; $\frac{52731}{396-w}=651$

Esercizio 87
Risolvete le equazioni.

a) $567+x\cdot 54=2025$; $z\cdot 650-28811=3689$; $605-23\cdot y=214$

b) $57\cdot x^2=2793$; $207\cdot 7^y=10143$; $41\cdot x^4=53136$

c) $\frac{x\cdot 89}{7031}=277$; $\frac{1364}{31\cdot w}=2$; $\frac{85536}{y^4}=66$; $\frac{z^5}{216}=36$

Esercizio 88
Risolvete le equazioni.

a) $\frac{x}{570}+882=7007$; $\frac{13284}{y}+1088=1124$

b) $\frac{x}{99}-666=3017$; $\frac{64024}{y}-88=124$

c) $760-\frac{x}{70}=308$; $760-\frac{4830}{y}=530$

d) $\frac{z^2}{18}=72$; $\frac{45056}{y^4}=11$; $\frac{3375104}{8^x}=103$

Esercizio 89
Risolvete le equazioni.

a) $x^2-109=180$; $8023-y^4=7398$; $z^7+3070=5257$

b) $x^2\cdot 419=94275$; $9^y-3908=2653$; $2^z+1307=2331$

c) $\frac{z^4}{7}=343$; $\frac{2272}{y^3}=284$; $\frac{89856}{2^y}=702$

Esercizio 90
Risolvete le equazioni.

$80870-518\cdot z^2=18192$; $\frac{2^x+37224}{712}=53$; $\frac{123820}{668-y^2}=205$

Esercizio 91
Risolvete le equazioni.

a) $103+23\cdot y^2=3990$; $2034-3\cdot x^2=1671$; $10.000-13\cdot 5^x=1875$

b) $z^5\cdot 19+3^5=1.900.243$; $2^x\cdot 341-18008=3816$; $y^2-34\cdot 3^4=7246$

Esercizio 92
Risolvete le equazioni.

a) $\dfrac{207\cdot x^3}{621}=720$; $\dfrac{280630+707\cdot y}{819}=372$; $\dfrac{302211}{z^4\cdot 41}=91$

b) $\dfrac{14928-47\cdot x}{19}=709$; $\dfrac{138047}{z\cdot 61+419}=91$; $\dfrac{24696}{16\cdot y-914}=36$

c) $\dfrac{100493-x^5}{17}=29$; $\dfrac{17670}{z^2+1009}=15$; $\dfrac{1975}{1079-y^3}=25$

Esercizio 93
Risolvete le equazioni.

a) $\dfrac{27\cdot y^3+246}{21}=22$; $\dfrac{17\cdot x^4-1013}{13}=28$

b) $\dfrac{15387-3\cdot y^3}{9}=1266$; $\dfrac{1495585}{z^2\cdot 41+35}=91$

c) $\dfrac{93956}{49\cdot x^3-2004}=83$; $\dfrac{92301}{5997-32\cdot x^2}=33$

9.9C Equazioni letterali

Esercizio 94
Risolvete le equazioni letterali.

a) $a\cdot x+b=c$; $b\cdot z-c=a$; $a-y\cdot c=m$; $(a+w)\cdot m=n$

b) $x^2+b=c$; $a\cdot z^6=b^2$; $a-y^3=m$; $a^2+w^3=n$

c) $x^3-b=c$; $(a+b)\cdot y^4=c$; $(a-b^2)\cdot y^3=m$; $a^2+3\cdot w^3=n$

d) $\dfrac{x}{c}=m$; $\dfrac{a}{y}=b$; $\dfrac{z^5}{c}-a=n$; $\dfrac{w}{n-c}=m$

e) $a-b\cdot x^n=m$; $\dfrac{a+b}{y-c}=m$; $\dfrac{b\cdot z^7}{c}-a=n$

Esercizio 95
Risolvete le equazioni letterali.

a) $\dfrac{a\cdot x}{m}=c$; $\dfrac{a+y}{b}=n$; $\dfrac{a-w}{n}=c$; $\dfrac{z-m}{b}=a$

b) $\dfrac{a}{m\cdot x}=c$; $\dfrac{a}{b+y}=m$; $\dfrac{a}{w-n}=b$; $\dfrac{m}{b-z}=a$

c) $\dfrac{a}{x^2}=c$; $\dfrac{y^4}{b}=a$; $\dfrac{a+b}{z^3}=m$; $\dfrac{a-c^3}{w^3}=n$

Esercizio 96
Risolvete le equazioni letterali.

a) $\dfrac{a+b\cdot x}{m}=c$; $\dfrac{b\cdot y-m}{a}=n$; $\dfrac{c-b\cdot z}{n}=m$

b) $\dfrac{a+x^n}{m}=c$; $\dfrac{c-z^8}{n}=m$; $\dfrac{a^y-m}{b}=n$

c) $\dfrac{a+b}{x^2-m}=c$; $\dfrac{b}{n-w^3}=c$; $\dfrac{b\cdot m}{z^n-a}=c$

Esercizio 97
Risolvete le equazioni letterali.

a) $\dfrac{a+b\cdot x^3}{n}=c$; $\dfrac{b\cdot a^x-c}{n}=m$; $\dfrac{a-b\cdot x^n}{m}=c$

b) $\dfrac{a+b}{m\cdot y^n}=c$; $\dfrac{b}{a\cdot y^n-m}=c$; $\dfrac{b}{m-a\cdot y^n}=c$

c) $\dfrac{b}{m\cdot y^n}+a=c$; $\dfrac{b}{y\cdot n+m}-a=c$; $a+\dfrac{b}{y^n+m}=c$

Esercizio 98
Risolvete le equazioni rispetto a ciascuna lettera.

a) $\dfrac{a\cdot b}{c}=m$; $a^n\cdot b=m$; $\dfrac{a-b}{c}=m$; $\dfrac{a-b}{n-c}=m$

b) $\dfrac{a\cdot b^n}{m}=c$; $\dfrac{a^n+b}{c}=m$; $\dfrac{b-a^n}{m}=c$; $\dfrac{a}{c^n+b}=m$

c) $\dfrac{a}{b-c^n}=m$; $\dfrac{a}{b-p\cdot c^n}=m$; $c+\dfrac{a^n\cdot b}{p}=m$; $\dfrac{a}{b-c^n}-p=m$

Quadro delle operazioni dirette e inverse

addizione → sottrazione → addizione / sottrazione

moltiplicazione → divisione → moltiplicazione / divisione

potenza → estrazione di radice → potenza / estrazione di logaritmo

potenza → estrazione di logaritmo → potenza / estrazione di radice

Operazioni inverse della radice e del logaritmo

Seguendo gli stessi principi usati per le altre operazioni, si può stabilire che le operazioni inverse dell'estrazione di radice sono:
- la potenza
- l'estrazione di logaritmo

mentre le operazioni inverse dell'estrazione di logaritmo sono:
- la potenza
- l'estrazione di radice.

Risolviamo, ad esempio, queste equazioni:

$\sqrt[2]{x} = 17 \qquad x = 17^2 = 289$

$\sqrt[y]{64} = 4 \qquad y = \log_4 64 = 3$

$\log_3 y = 5 \qquad y = 3^5 = 243$

$\log_x 128 = 7 \qquad x = \sqrt[7]{128} = 2$

Tavola esponenziale

base *esponente*

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	8	16	32	64	128	256	512
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683
4	16	64	256	1024	4096	16387	65536	262144
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	134217728
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	387420489
10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	100000000	1000000000

Con l'uso della tavola esponenziale il calcolo dell'estrazione di radice e di logaritmo in N si può eseguire senza difficoltà.

- Nella prima colonna della tavola si legge la base;
- nel primo rigo l'esponente;
- ogni numero naturale che si trova all'incrocio di un rigo con una colonna è la potenza che si ottiene mettendo come base il numero che sta all'inizio del rigo e come esponente il numero che sta all'inizio della colonna.

Esempi:

- estraiamo il logaritmo:

$$\log_9 59049$$

Scorriamo il rigo 9 della tavola esponenziale, fino ad incontrare l'argomento del logaritmo, cioè il numero 59049.
Percorrendo verso l'alto la colonna in cui si trova questo numero, alla sua estremità, si leggerà il risultato cercato, cioè 5.

Pertanto: $\log_9 59049 = 5$

- estraiamo la radice:

$$\sqrt[7]{279936}$$

Scorriamo la colonna 7, fino ad incontrare il radicando, cioè il 279936.
Percorrendo verso sinistra il rigo in cui si trova questo numero, alla sua estremità, si leggerà il risultato cercato, cioè 6.

Pertanto: $\sqrt[7]{279936} = 6$