Tratto dal libro: « Integer Numbers - Aritmetica »
Autore: Vincenzo Vitale ; e-mail: vincenzovitale@integernumbers.org ; vincenzovitale@tim.it

HOME PAGE L'insieme ϕ

Combinazione ϕ

Siano: ϕ_q l'insieme degli interi maggiori di zero, minori di q e coprimi con il numero naturale dispari q ; $\phi(q)$ la quantità degli elementi contenuti in ϕ_q ; $a \in \phi_q$ un residuo quadratico.

Il nostro obiettivo è di stabilire quante sono le radici quadrate di **a** in ϕ_q
Come abbiamo descritto precedentemente, nell'articolo " L'insieme ϕ " , le radici quadrate del residuo quadratico **a** sono gli elementi "doppi" di ϕ_q e, poiché per ogni elemento doppio c ne esiste un altro della forma c'=q-c , possiamo limitarci a ricercare questi elementi doppi tra i primi $\phi(q)/2$ elementi di ϕ_q ; moltiplicheremo poi per 2 la quantità trovata.
In realtà, ciò che dobbiamo fare qui, in accordo con quanto abbiamo stabilito nella relazione "L'insieme ϕ" , è contare quante sono le possibili distribuzioni dei fattori primi di q ($q = m \cdot g \cdot \ldots \cdot j$) in due insiemi disgiunti A e B .
Per questo calcolo utilizzeremo la formula delle combinazioni semplici di n oggetti di ordine k: $m = n! / [k!(n-k)!]$, ma con qualche variazione.
Inoltre, riterremo equivalenti quelle distribuzioni in cui i due insiemi A e B si invertono:

[A={m , g , . . . , t} ; B={s , k , . . . , j}] **1** [A={s , k , . . . , j} ; B={m , g , . . . , t}]

Per ricavare la formula che esprime la quantità di tutte queste combinazioni analizziamo ciò che accade con 5, 6 e 7 oggetti.

* Gli oggetti da distribuire nei due insiemi disgiunti A e B siano 5, indichiamoli con le lettere: a-b-c-d-e
Prima distribuzione : ne mettiamo 0 nell'insieme A e 5 nell'insieme B.
A={ } ; B={a-b-c-d-e}
C'è una sola combinazione: $p_0(5) = 1$
Seconda distribuzione : ne mettiamo 1 nell'insieme A e gli altri 4 nell'insieme B.
A={a} ; B={b-c-d-e}
A={b} ; B={a-c-d-e}
A={c} ; B={a-b-d-e}
A={d} ; B={a-b-c-e}
A={e} ; B={a-b-c-d}
Le combinazioni sono tante quanti sono gli oggetti: $p_1(5) = 5$
Terza distribuzione : ne mettiamo 2 nell'insieme A e gli altri 3 nell'insieme B .
A={a-b} ; B={c-d-e}
A={a-c} ; B={b-d-e}
A={a-d} ; B={b-c-e}
A={a-e} ; B={b-c-d}
A={b-c} ; B={a-d-e}
A={b-d} ; B={a-c-e}
A={b-e} ; B={a-c-d}
A={c-d} ; B={a-b-e}
A={c-e} ; B={a-b-d}
A={d-e} ; B={a-b-c}
Le combinazioni sono 10: $p_2(5) = 10$
Questo risultato si può ottenere direttamente dalla formula del calcolo combinatorio: $p_2(5) = 5 \cdot 4/2 = 10$
Non ci sono altre combinazioni da contare: distribuire 3 oggetti in A e 2 in B equivale a invertire A con B nella 3^a distribuzione.
Per i nostri scopi non importa l'ordine dei due gruppi, per cui, ad esempio, riterremo equivalenti le due distribuzioni:
[A={(a-b} ; B={c-d-e}] **1** [A={c-d-e} ; B={a-b}]
La somma di tutte le distribuzioni possibili di 5 oggetti nei due insiemi A e B è:
$S(5) = p_0(5) + p_1(5) + p_2(5) = 1+5+10 = 16$

* Gli oggetti da distribuire nei due insiemi disgiunti A e B siano 6 : a-b-c-d-e-f

Prima distribuzione:	0 in A, 6 in B.	$p_0(6) = 1$
Seconda distribuzione:	1 in A, 5 in B.	$p_1(6) = 6$
Terza distribuzione:	2 in A, 4 in B.	$p_2(6) = 15$; $p_2(6) = 6 \cdot 5/2 = 15$
Quarta distribuzione:	3 in A, 3 in B.	$p_3(6) = 10$; $p_3(6) = 6 \cdot 5 \cdot 4/(3 \cdot 2)/2 = 10$.

Si osservi che in questo caso la formula del calcolo combinatorio va modificata, aggiungendole il divisore 2 .
Questa divisione per 2 si dovrà aggiungere nel calcolo dell'ultima distribuzione ogni volta che gli n oggetti da distribuire sono in numero pari, perché, in questo caso, si devono distribuire n/2 oggetti in A e n/2 oggetti in B.
La somma di tutte le possibili distribuzioni in due insiemi A e B di 6 oggetti è:
$S(6) = p_0(6) + p_1(6) + p_2(6) + p_3(6) = 1+6+15+10 = 32$
Confrontiamo questo risultato con il precedente ; è sufficiente confrontare soltanto le distribuzioni fatte in A.
$p_0(6) = p_0(5) = 1$;
$p_1(6) = p_1(5)+1$;
$p_2(6) = p_2(5)+p_1(5)$; per formare tutte le coppie con 6 oggetti in A, basta aggiungere, alle 10 coppie possibili con 5 oggetti in A, le coppie che il 6° oggetto può formare con i 5 oggetti precedenti.
$p_3(6) = p_2(5)$; per formare le terne con 6 oggetti in A, basta combinare il 6° oggetto con le coppie possibili coi 5 oggetti di prima.
Rifacciamo la somma:

$$S(6) = p_0(6) + p_1(6) + p_2(6) + p_3(6) = p_0(5) + [p_1(5)+1] + [p_2(5)+p_1(5)] + p_2(5) = 2[p_0(5)+p_1(5)+p_2(5)] = 2 \cdot S(5)$$

* Gli oggetti da distribuire nei due insiemi disgiunti A e B siano 7 : a-b-c-d-e-f-g
Prima distribuzione: 0 in A, 7 in B. $p_0(7) = 1$
Seconda distribuzione: 1 in A, 6 in B. $p_1(7) = 6+1=7$
Terza distribuzione: 2 in A, 5 in B. $p_2(7) = 15+6 = 21$; $[p_2(7) = 7 \cdot 6/2 = 21]$
Quarta distribuzione: 3 in A, 4 in B. $p_3(7) = 20+15 = 35$; $[p_3(7) = (7 \cdot 6 \cdot 5)/(3 \cdot 2) = 35]$
La somma delle distribuzioni in due insiemi A e B di 7 oggetti è: $S(7)=p_0(7)+p_1(7)+p_2(7)+p_3(7) = 1+7+21+35=64$.
Confrontiamo questo risultato con il precedente:
$p_0(7) = p_0(6) = 1$;
$p_1(7) = p_1(6)+1$;
$p_2(7) = p_2(6)+p_1(6)$; alle 15 coppie possibili in A con 6 oggetti, si devono aggiungere quelle ottenute combinando il 7° oggetto con ognuno dei primi 6 oggetti.
$p_3(7) = 2 \cdot p_3(6)+p_2(6)$; alle 20 triple possibili in A con 6 oggetti, date dal calcolo combinatorio, senza la divisione per 2 , si devono aggiungere le triple che il 7° oggetto può formare con ciascuna delle coppie possibili con i primi 6 oggetti, cioè altre 15 triple.
Adesso che gli oggetti sono 7 , le triple possibili in A con 6 oggetti si devono contare tutte, anche quelle dell'insieme B che prima abbiamo escluso.
Rifacciamo la somma:

$$S(7)=p_0(7)+ p_1(7)+p_2(7)+p_3(7) = p_0(6)+ [p_1(6)+1]+ [p_2(6)+p_1(6)] +[2 \cdot p_3(6)+p_2(6)] = 2 \cdot [p_0(6)+p_1(6)+p_2(6)+p_3(6)] = 2 \cdot S(6)$$

Generalizziamo le osservazioni fatte con questi esempi.
Dato un numero d di oggetti, sia S (d) la quantità delle combinazioni ottenibili distribuendoli in tutti i modi possibili in due insiemi disgiunti A e B:

$$S(d) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + \dots$$

Ci proponiamo di calcolare la somma S'(d+1) di (d+1) oggetti.

$$S'(d+1) = p'_0 + p'_1 + p'_2 + p'_3 + \dots$$

Per i nostri scopi è sufficiente tenere conto solo delle distribuzioni fatte nell'insieme A.
Come abbiamo visto negli esempi, è possibile ricavare la S'(d+1) da S(d) :
$p'_0 = p_0 = 1$; $p'_1 = p_1 + 1$; $p'_2 = p_2 + p_1$; $p'_3 = p_3 + p_2$; $p'_4 = p_4 + p_3$; ...
- Il risultato p'_0 è sempre uguale al precedente: $p'_0 = p_0 = 1$
- Il risultato p'_1 è sempre uguale al numero degli oggetti da distribuire, quindi si ottiene aggiungendo 1 al precedente.
- Il risultato p'_2 si può ottenere aggiungendo al numero di coppie p_2, già formate in A con d oggetti, il numero p_1 di coppie che il nuovo oggetto forma con i d oggetti precedenti.
- Il risultato p'_3 si può ottenere aggiungendo alle p_3 triple, già formate in A con d oggetti, il numero p_2 di triple che il nuovo oggetto forma con le coppie dei d oggetti precedenti.
- Il risultato p'_4 si può ottenere aggiungendo al numero p_4 di quadruple, già formate in A con d oggetti, il numero p_3 di quadruple che il nuovo oggetto forma con le triple dei d oggetti precedenti.

Si può andare avanti così, all'infinito:

$$\mathbf{S'(d+1)) = p'_0 + p'_1 + p'_2 + p'_3 + \dots = 1 + (p_1 + 1) + (p_2 + p_1) + (p_3 + p_2) + (p_4 + p_3) + \dots = 2 + 2p_1 + 2p_2 + 2p_3 + 2p_4 \dots}$$

Ponendo un limite a questa somma illimitata, sia p_n l'ultimo addendo di S(d)
Vediamo qual è l'ultimo addendo della somma S'(d+1):
- se (d+1) è pari, le combinazioni della sua ultima distribuzione sono tante quante quelle dell'ultima distribuzione di d oggetti:

$$S'(d+1) = 1 + (p_1 + 1) + (p_2 + p_1) + (p_3 + p_2) + (p_4 + p_3) + \dots + (p_{n-1} + p_{n-2}) + (p_n + p_{n-1}) + p_n = 2 \cdot S(d)$$

In questo caso gli addendi di S'(d+1) sono in numero pari e sono uguali a due a due.
- se (d+1) è dispari, le combinazioni della sua ultima distribuzione si ottengono aggiungendo il doppio delle combinazioni dell'ultima distribuzione di d oggetti alle penultime combinazioni di d oggetti:

$$S'(d+1) = 1 + (p_1 + 1) + (p_2 + p_1) + (p_3 + p_2) + (p_4 + p_3) + \dots + (p_{n-1} + p_{n-2}) + (2p_n + p_{n-1}) = 2 \cdot S(d)$$

In questo caso gli addendi di S'(d+1) sono in numero dispari e solo l'addendo p_n non è in coppia con gli altri addendi , in compenso però è accompagnato da un fattore 2.
Quindi, in entrambi i casi:

$$S(d+1) = 2 \cdot S(d)$$

I primi valori di S si possono ottenere con il calcolo diretto:

1 oggetto	$S(1) = p_0 = 1$
2 oggetti	$S(2) = p_0 + p_1 = 1+1 = 2$
3 oggetti	$S(3) = p_0 + p_1 = 1+3 = 4$
4 oggetti	$S(4) = p_0 + p_1 + p_2 = 1+4+3 = 8$

Continuando, possiamo utilizzare la formula trovata:

5 oggetti	$S(5) = 2 \cdot S(4) = 16$

. . . .

Per cui:

$$S = 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; \dots = 2^{d-1}$$ (essendo $d \geq 1$ il numero degli oggetti da combinare)

Nel caso specifico degli elementi doppi dell'insieme ϕ_q, tutti gli addendi di S hanno valore doppio:

$$m = 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; \dots = 2^n$$ (essendo $n \geq 1$ la quantità dei divisori primi del numero dispari q)