pubblicazione web del 13 - 04 - 2008

Criteri di divisibilità

per : 2 - 3 - 5 - 7 - 11 - 13

mp3

Home page
Criterio unico di divisibilità
Criteri di divisibilità per 19 e 29
Criterio di divisibilità per 101

Dimostrazioni
I criteri descritti in questa pagina sono delle semplificazioni di calcolo ottenute con l’uso delle congruenze. Sono stati dedotti elaborando il “Criterio generale di divisibilità” dovuto al matematico Blaise Pascal.

- Divisibilità per 2

Un numero intero n è divisibile per 2 se la sua ultima cifra è pari.

Cifre pari: 2 - 4 - 6 - 8 - 0 ; Cifre dispari: 1 - 3 - 5 - 7 - 9

Esempi: 8 - 314 - 7.650 - 317.956 - 639.001.332 sono divisibili per 2, perché la loro ultima cifra è pari.
1 - 29 - 710.003 - 1.199.685 - 2.462.480.247 non sono divisibili per 2, perché la loro ultima cifra è dispari.

- Divisibilità per 3

Un numero intero n è divisibile per 3 se la somma delle sue cifre è un multiplo di 3: 3 - 6 - 9 - 12 . . .

Esempi
Stabiliamo se 627 , 700100023 e 450731621 sono divisibili per 3.

* 627 >> 6+2+7 = 15 >> 1+5 = 6 La somma finale è 6, multiplo di 3, quindi 627 è divisibile per 3.

* 700100023 >> 7+0+0+1+0+0+0+2+3 = 13 >> 1+3 = 4
Poiché 4 non è un multiplo di 3, si deduce che 700100023 non è divisibile per 3.

* Si fa più in fretta eliminando da n le cifre multiple di 3 e quelle, anche non consecutive, la cui somma è un multiplo di 3:
450731621 >> (~~4~~5) ~~0~~ 7 ~~3~~ 1 ~~6~~ (~~2~~1) >> 7+1 = 8 Ne segue che 450731621 non è divisibile per 3.

- Divisibilità per 5

Un numero intero n è divisibile per 5 se la sua ultima cifra è 0 oppure 5.

Esempi: 15 - 123.675 - 125 sono divisibili per 5, perché terminano con la cifra 5.
100 - 24.860 - 5.555.550 sono divisibili per 5, perché terminano con la cifra 0.
761 - 5.553 - 50.000.002 non sono divisibili per 5, perché nessuno di essi termina con la cifra 0 o 5.

- Divisibilità per i numeri primi 7 , 11 , 13

Dato un numero intero n , possiamo stabilire la sua divisibilità per i numeri primi 7, 11 e 13 in un colpo solo, cioè con una sola verifica valida contemporaneamente per tutti e tre.

Distinguiamo le due situazioni in cui il numero n da esaminare sia costituito da più di tre cifre, oppure da tre cifre soltanto.

A) - Criterio unico di divisibilità per 7, per 11 e per 13 di un qualsiasi intero n, costituito da più di tre cifre.

I passaggi descritti di seguito ci consentono di ridurre n a un intero ad esso congruente di non più di 3 cifre.
1) - Si staccano le cifre del numero n da esaminare in classi di tre cifre, procedendo da destra verso sinistra.
2) - Si calcolano la somma delle classi di posto pari e la somma delle classi di posto dispari.
3) - Si calcola la differenza d delle due somme.
4) - Se necessario, si ripeteranno i passaggi da 1 a 3, fino a quando la differenza d sarà formata da non più di tre cifre.
5) - La divisibilità di d per i numeri 7, 11 e 13 sarà uguale a quella di n: $d \equiv n$ (mod. 7) ; (mod. 11) ; (mod. 13)

Quando si divide n in classi di 3 cifre, a volte, è opportuno procedere da sinistra a destra, ma, nel caso in cui dovesse essere necessario, si dovranno aggiungere uno o due zeri, affinché l’ultima classe sia formata anch’essa da tre cifre.
Attenzione, aggiungendo qualche zero, la congruenza del punto 5 sarà valida solo se: $d \equiv n \equiv 0$ (mod. 7) ; (mod. 11) ; (mod. 13) pur tuttavia l’applicazione del criterio di divisibilità avrà piena validità.

- Spesso, come accade nei seguenti esempi, questo criterio di divisibilità si applica con facile e immediato calcolo mentale.
Stabiliamo la divisibilità per 7, per 11 e per 13 dei numeri: 131001 ; 61061 ; 5003 ; 12913 ; 801.823.009

* La riduzione a tre cifre di 131.001 è immediata: 131- 001 = 130 >>> 13 (Lo zero finale si può eliminare)
e la conclusione pure: come appare evidente per il 13, anche 131.001 è divisibile per 13, ma non per 7 e nemmeno per 11.

* Anche per il secondo numero il risultato è immediato: 61.061 >>> 61 - 61 = 0
Poiché 0 è multiplo di ogni numero intero, ne segue che 61.061 è divisibile sia per 7, sia per 11, sia per 13.

* 5003 >>> 500.300 >>> 500- 300 = 200 Ne segue che 5003 non è divisibile né per 7, né per 11, né per 13.

* 12913 >>> 129.130 >>> 130- 129 = 1 Ne segue che 12.713 non è divisibile né per 7, né per 11, né per 13.

* 801.823.009 >>> 801 + 9 - 823 = - 13 Ne segue che 801.823.009 è divisibile per 13, ma non per 7 e nemmeno per 11.

- In questi altri casi il calcolo è più impegnativo, anche per la notevole quantità di cifre dei numeri da esaminare, ma il vantaggio che deriva dall’uso di questo criterio di divisibilità è considerevole.

Esaminiamo i numeri 823.935.167 ; 8.878.011.623.341 ; 68953

* Riduciamo 823.935.167 a tre cifre: 823 + 167 - 935 = 55 Quindi 823.935.167 è divisibile per 11, ma non per 7 e per 13.

* 8.878.011.623.341 è divisibile solo per 7: (878 + 623)- (8 + 11 + 341) = 1501- 360 = 1141 >>> 141- 1 = 140 >>> 14

* Esaminiamo il numero 53689.
636 = 689 - 53 non è divisibile né per 7, né per 11, né per 13, quindi neanche 53689 è divisibile per ciascuno di essi.

Ma come si riconoscono i multipli di 7 di 11 e di 13 quando le cifre di n sono soltanto tre? E’ ciò che vedremo qui di seguito.

Dopo aver ridotto n ad uno congruente di 3 cifre è possibile un’ulteriore riduzione a un altro congruente di non più di 2 cifre.

B) - Criterio di divisibilità per 7 di un numero intero m di 3 cifre.

1) - Si moltiplica la prima cifra per 2 e il prodotto si addiziona al numero formato dalle altre due cifre.
2) - Se la somma è un multiplo di 7, m è divisibile per 7; in caso contrario m non è divisibile per 7.

Stabiliamo se i numeri 623 , 819 e 789 sono divisibili per 7.
* 623 >>> 6•2+23=35 Poiché 35 è multiplo di 7 , anche 623 è multiplo di 7. Infatti: 623=7•89
Nota: a ogni cifra maggiore o uguale a 7 si può sottrarre 7 e fare la verifica col risultato ottenuto.
* 819 >>> 112 >>> 2+12=14 Ne segue che 819 è multiplo di 7.
* 789 >>> 012 Ne segue che 789 non è multiplo di 7.

C) - Criterio di divisibilità per 11 di un numero intero m di 3 cifre.

1) - Si addizionano algebricamente le cifre del numero m , considerando la sua cifra centrale negativa.
2) - Se la somma algebrica è 0 oppure 11, m è divisibile per 11; in caso contrario m non è divisibile per 11.

Stabiliamo se i numeri 473 , 869 e 403 sono divisibili per 11.
* Sommiamo algebricamente le cifre di 473, considerando il 7 negativo: 4 + 3 - 7 = 0
Poiché 0 è multiplo di 11, ne segue che 473 è divisibile per 11.
* Sommiamo algebricamente le cifre di 869: 8 - 6 + 9 = 11. Ne segue che 869 è divisibile per 11.
* 403 >>> 4 + 3 - 0 = 7 Quindi 403 non è divisibile per 11.

D) - Criterio unico di divisibilità per 7 e per 13 di un numero intero m di 3 cifre.

1) - Si addiziona algebricamente a ciascuna delle tre cifre di m quella che ai suoi estremi è la minore, considerandola, alternativamente, una volta negativa e un'altra volta positiva.
2) - Si elimina lo zero che si forma a uno dei due estremi.
3) - Il numero g di 2 cifre così ottenuto avrà la stessa divisibilità per 7 e per 13 di m : $g \equiv m$ (mod.7) ; (mod. 13)

Stabiliamo se 133 , 377 , 273 , 839 , 623 sono divisibili per 7 e per 13.

* Le cifre agli estremi di 133 sono 1 e 3 e la più piccola di esse è 1.
Addizioniamo algebricamente 1 a ciascuna cifra di 133, considerando 1, alternativamente, negativo e positivo:
133 + 111 = 042 Si è ottenuto 42 che è multiplo di 7, ma non di 13, quindi 133 è divisibile per 7, ma non per 13.

* Considerato che la cifra più piccola agli estremi di 377 è 3, sottraiamo 3 alla cifra 7 dell’altro estremo e addizioniamolo invece a quella al centro: 77 + 33 = 104. Poiché si è ottenuto ancora un numero a tre cifre, il procedimento va ripetuto: sottraiamo 1 al 4 e addizioniamolo a 0 : 04 + 11 = 13
Da qui ne segue che 377 è divisibile per 13, ma non per 7.

* Applichiamo il criterio di divisibilità a 273 , il 2 lo sottraiamo al 3 e lo addizioniamo al 7: 73 + 22 = 91.
91 è il più piccolo multiplo di 7 e di 13 (7 x 13 = 91) , quindi 273 è divisibile sia per 7 sia per 13.

* Applichiamo il criterio di divisibilità a 839: 39 + 88 =111 Ripetiamo il criterio: 11+11 = 2
Quindi 839 non è divisibile né per 7 né per 13.

* Applichiamo il criterio di divisibilità a 623 : 62 + 33 = 35 Quindi 623 è divisibile per 7, ma non per 13.

Esempi di riepilogo.
Stabiliamo la divisibilità per 7, per 11 e per 13 dei seguenti numeri.

* 84091 >>> 91- 84 = 7 L’esito è immediato: 84091 è divisibile per 7, ma non per 11 e nemmeno per 13.

* Riduciamo 103467 a non più di tre cifre: 467 - 103 = 364
Riduciamo 364 a una o due cifre:
- consideriamo la divisibilità per 11: 3 + 4 - 6 = 1 Ne segue che 103467 non è divisibile per 11.
- consideriamo la divisibilità per 7 e per 13: 64 + 33 = 91 Ne segue che 103.467 è divisibile sia per 7 sia per 13.

* Riduciamo il numero di 28 cifre 6.324.695.832.106.290.756.943.537.283 a tre cifre:
6+695+106+756+537 = 2100 ; 324+832+290+943+283 = 2672 ; 2672 - 2100 = 572
Verifichiamo la divisibilità di 572: 5 + 2 - 7 = 0 ; 57 + 22 = 39 = 3•13
Ne segue che 6.324.695.832.106.290.756.943.537.283 è divisibile per 11 e per 13, ma non è divisibile per 7.

* 200.300.111.000.001 Il calcolo è immediato: non è divisibile né per 7, né per 11, né per 13.