Home page | Criterio di divisibilità per 7 e 13 | Criterio di divisibilità per 19 e 29 | Criterio di divisibilità per 101 | mp3

Criterio generale di divisibilità

Pubblicazione web del 20/07/2010

I criteri di divisibilità descritti nei libri di scuola si possono generalizzare, ed estendere a tutti i numeri interi, enunciando una sola proposizione. La regola qui descritta è l'applicazione di alcune proprietà aritmetiche dei numeri interi.

Per stabilire se il numero intero m è divisibile per un altro intero n, scegliamo da una delle due tabelle riportate sotto, indifferentemente: o il coefficiente **ά** , o il coefficiente **ώ** , associato ad n. Dopo applichiamo il procedimento descritto di seguito, facendo attenzione al verso di percorrenza lungo le cifre di m.

- Moltiplichiamo per ά (o per ώ) la prima cifra del numero m e addizioniamo il prodotto ottenuto alla seconda cifra;
- moltiplichiamo per ά (o per ώ) la somma così ottenuta e addizioniamo il prodotto alla cifra successiva;
- continuiamo ripetitivamente in questo modo, fino ad esaurire tutte le cifre di m.
Se l'intero che si ottiene alla fine è divisibile per n, anche il numero m in esame è divisibile per n.
Viceversa, se l'intero ottenuto alla fine non è divisibile per n, non lo è nemmeno il numero m di partenza.

* Applichiamo la regola utilizzando il coefficiente ά

numero **n**	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
coefficiente **ά** →	0	1	2	0	-2	3	2	1	0	-1	-2	-3

In questa tabella sono elencati i coefficienti **ά** associati soltanto ai primi 13 numeri interi n, perché è chiaro che questo criterio di divisibilità è apprezzabile fintantoché **ά**, in valore assoluto, è minore di 10: |**ά**|< 10
Utilizzando i coefficienti **ά**, la regola si deve applicare alle cifre di m procedendo da sinistra a destra.
Reiterando il procedimento più volte, alla fine si otterrà un numero formato da una sola cifra.

- Divisibilità per 2, per 5 e per 10

Stabiliamo se i numeri 275 , 15732 e 1769373803715730 sono divisibili per 2, per 5 e per 10.

Come si può vedere dalla tabella, ai numeri 2 , 5 e 10 è associato lo stesso coefficiente: **ά = 0**
Ne consegue che il criterio di divisibilità è valido simultaneamente per 2, per 5 e per 10.

* 275 >> (2 x 0 + 7) x 0 + 5 = 5

Il risultato è 5, multiplo di 5, ma non di 2 e nemmeno di 10. Ne segue che 275 è divisibile per 5, ma non per 2 e nemmeno per 10.

* 15732 >> (((1 x 0 + 5) x 0 + 7) x 0 + 3) x 0 + 2 = 2

Dal risultato finale ne segue che 15732 è divisibile per 2 , ma non per 5 e nemmeno per 10.

Come si evince da questi esempi, poiché il coefficiente **ά** è 0, e 0 annulla tutti i prodotti, la divisibilità per 2, per 5 e per 10 è determinata dall'ultima cifra del numero m.

* 1769373803715730 >> 0

Senza eseguire i calcoli, possiamo stabilire che il criterio di divisibilità ci darà come risultato l'ultima cifra di m, cioè 0.
Dato che 0 è multiplo di ciascun intero, ne deduciamo che 1769373803715730 è divisibile sia per 2 , sia per 5 , sia per 10.

Ne deriva da qui il noto criterio di divisibilità per 2, per 5 e per 10 appreso da tutti noi a scuola.

- Divisibilità per 3 e per 9

Stabiliamo se i numeri 423 , 13692 e 100090103 sono divisibili per 3 e per 9.

Il coefficiente **ά** è 1, sia per 3, sia per 9, per cui, applicando la regola, il risultato sarà valido per entrambi.

* 423 >> (4 x 1 + 2) x 1 + 3 = 4 + 2 + 3 = 9

Il risultato finale è 9, multiplo di 3 e di 9. Ne consegue che 423 è divisibile sia per 3, sia per 9.

* 13629 >> (((1 x 1 + 3) x 1 + 6) x 1 + 2) x 1 + 9 = 1 + 3 + 6 + 2 + 9 = 21 >> 2 x 1 + 1 = 3

Il risultato finale è 3, multiplo di 3, ma non di 9. Ne consegue che 13629 è divisibile per 3, ma non per 9.

Come si evince da questi esempi, poiché il coefficiente **ά** è 1 , e 1 non influisce sul prodotto , alla fine ciò che stabilisce la divisibilità per 3 e per 9 è la somma delle cifre del numero m in esame.

* 100090103 >> 1+0+0+0+9+0+1+0+3 = 14 >> 1+ 4 = 5

Il risultato finale 5 implica che 100090103 non è divisibile né per 3 né per 9.
Ne deriva da qui il noto criterio di divisibilità per 3 e per 9 appreso da tutti noi a scuola.

- Divisibilità per 11

Stabiliamo se i numeri 473 , 637217 e 346011534 sono divisibili per 11.

Applichiamo la regola, considerando che il coefficiente **ά** di 11 è -1.

* 473 >> [4 x (- 1) + 7)] x (-1) + 3 = 3 x (-1) + 3 = 0   Deduciamo da qui che 473 è divisibile per 11.
* 637217 >> [[[[6 x (-1) + 3] x (-1) + 7] x (-1) + 2] x (-1) + 1] x (-1) + 7 = -2   Quindi 637217 non è divisibile per 11.

Come si può notare, il coefficiente -1 influisce sul prodotto solo per ciò che riguarda il segno , cosicché, in pratica, applicare questo criterio di divisibilità per 11 equivale a sommare le cifre di m, considerandole alternativamente una positiva e l'altra negativa.

* 346011534 >> - 3 + 4 - 6 + 0 - 1 + 1 - 5 + 3 - 4 = - 19 + 8 = - 11 >> - 1 + 1 = 0   Quindi 346011534 è divisibile per 11.

Ne deriva da qui il noto criterio di divisibilità per 11 appreso da tutti noi a scuola.

- Divisibilità per 4 e per 8

Stabiliamo se i numeri 5136 , 3788 e 7588834987650218 sono divisibili per 4 e per 8.

Applichiamo la regola di divisibilità, considerando che 4 e 8 hanno lo stesso coefficiente: **ά** = 2.

* 5136 >> ((5 x 2 + 1) x 2 + 3) x 2 + 6 = 56 >> 2 x 5 + 6 = 16 >> 1 x 2 + 6 = 8

Dal risultato finale deduciamo che 5136 è divisibile per 8, quindi anche per 4.

* 3788 >> ((3 x 2 + 7) x 2 + 8) x 2 + 8 = 76 >> 7 x 2 + 6 = 20 >> 2 x 2 + 0 = 4

Da questo risultato si evince che 3788 è divisibile per 4, ma non per 8.

Considerando una proprietà aritmetica dei numeri interi, il calcolo si può limitare soltanto alle ultime tre cifre del numero m.
Ma, se si deve stabilire la divisibilità solo per 4, il calcolo si può limitare soltanto alle ultime due cifre di m.

* 7588834987650218 >> 218 >> (2 x2+1) x 2 + 8 = 18 >> 1 x 2 + 8 = 10 >> 2

Quindi 7588834987650218 non è divisibile né per 8 né per 4.

- Divisibilità per 6 e per 12

Stabiliamo se i numeri 2016 e 1305762 sono divisibile per 6 e per 12.
Applichiamo la regola di divisibilità, considerando che il 6 e il 12 hanno lo stesso coefficiente: **ά** = -2.

* 2016 >> [[2 x (- 2) + 0] x (- 2) + 1] x (- 2) + 6 = - 12 >> - (1 x (- 2) + 2) = 0   Ne segue che 2016 è divisibile per 6 e per 12.
* 1305762 >> [[[[[1 x (- 2) + 3] x (- 2) + 0] x (- 2) + 5] x (- 2)+ 7] x (- 2) + 6] x (- 2) + 2 = - 54 >> - [5 x (- 2) + 4] = 6
  Ne segue che 1305762 è divisibile per 6, ma non per 12.

- Divisibilità per 7 e per 13

I libri di scuola generalmente non danno un criterio di divisibilità né per 7 né per 13.
Ho già enunciato in questo sito un facile criterio di divisibilità valido contemporaneamente per entrambi. In questa occasione ne descrivo un altro. Infatti il criterio generale di divisibilità si può applicare anche a questi due numeri primi.

Stabiliamo se il numero 15421 è divisibile per 7 e per 13.

Applichiamo la regola, considerando che i coefficienti **ά** di 7 e di 13 sono rispettivamente 3 e -3.

* (((1 x 3 + 5) x 3 + 4) x 3 + 2) x 3 + 1 = 259 >> (2 x 3 + 5) x 3 + 9 = 42 >> 4 x 3 + 2 = 14 >> 3 x 1 + 4 = 7
  Ne segue che 15421 è divisibile per 7.

Ricorrendo alle congruenze il calcolo si riduce notevolmente: (((1x3+5)x3+4)x3+2)x3+1 ≡ ((1x3+4)x3+2)x3+1 ≡ (0+2)x3+1 ≡ 7

* [[[1 x (- 3) + 5] x (- 3) + 4] x (- 3) + 2] x (- 3) + 1 = - 23 >> 2 x (- 3) +3 = -3   Ne segue che 15421 non è divisibile per 13.

Ma se sfruttiamo le proprietà di questi due numeri primi, i calcoli saranno più semplici.
Riduciamo il numero m ad uno di non più di tre cifre e applichiamo a quest'ultimo:
a) il criterio di divisibilità per 7, usando il coefficiente 3;
b) il criterio di divisibilità per 13, usando il coefficiente - 3.

(Per sapere come ridurre il numero m ad uno congruente di non più di 3 cifre, cliccare sul pulsante in alto:
"Criterio di divisibilità per 7 e per 13")

Stabiliamo se il numero 353041 è multiplo di 7 e di 13.
- Riduciamolo prima a uno congruente di 3 cifre: 353.041 >> 353 - 041 = 312
- Verifichiamo la divisibilità di 312 rispettivamente per 7 e per 13:

* (3 x 3 + 1) x 3 + 2 = 32 >> 3 x 3 + 2 = 11 ; [3 x (- 3) + 1] x (- 3) + 2 = 26 >> 2 x (- 3) + 6 = 0

Si deduce da qui che 353041 è divisibile per 13, ma non per 7.

* Applichiamo la regola utilizzando il coefficiente ώ

numero **p**	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	41
coefficiente **ώ** ←	0(1)	1	0(1)	-2	-1	4	-5	2	7	3	-3	-4

In questa tabella sono elencati i coefficienti **ώ** associati ad alcuni numeri primi.
Con i coefficienti **ώ** la regola si deve applicare alle cifre del numero m, da testare, procedendo da destra a sinistra .
Il procedimento va reiterato fino ad ottenere un numero minore o uguale a p. Se m è divisibile per p, alla fine si otterrà zero oppure p.
Si tengano presenti le seguenti avvertenze.
- Sia per il 2, sia per il 5, si deve utilizzare il coefficiente 1 per la prima cifra e il coefficiente 0 per tutte le altre.
  Per questi numeri primi ne segue quindi il criterio di divisibilità descritto sopra.
- Poiché i coefficienti **ώ** di 3 e di 11 sono rispettivamente 1 e -1, uguali a quelli di **ά** , i criteri di divisibilità per questi due numeri sono identici a quelli descritti sopra.

Facciamo alcuni esempi.
- Stabiliamo se il numero 3409 è divisibile per 7.

Eseguiamo i calcoli, considerando che il coefficiente **ώ** di 7 è -2
[[9 x (- 2) + 0] x (- 2) + 4] x (- 2) + 3 = - 77 >> 7 x (- 2) + 7 =- 7   Quindi 3409 è divisibile per 7.
Naturalmente è più semplice ridurre 3409 a uno equivalente di 3 cifre e applicare a questo il criterio di divisibilità:

* 3409 >> 409 - 3 = 406 >> [6 x (- 2)+0] x (- 2) + 4 = 28 >> 8 x (- 2) + 2 = - 14 >> - [4 x (- 2) + 1] = 7

E con l'uso delle congruenze il calcolo è ancora più rapido: [6 x (- 2) + 0] x (- 2) + 4 g [- 5 + 0] x (- 2) + 4 g 14 g 0 (mod. 7)

- Stabiliamo se il numero 50100237 è divisibile per 41.

Conviene ridurlo ad uno equivalente di non più di cinque cifre e applicare a questo il criterio unico di divisibilità.
Eseguiamo i calcoli, considerando che il coefficiente **ώ** di 41 è - 4.

* 501.00237 >> 237 + 501 = 738 >> [[[8 x (- 4) + 3] x (- 4) + 7 g [[[9 + 3] x (- 4) + 7 g - 41 g 0 (mod. 41)

Quindi 50100237 è divisibile per 41.

- Per ciò che riguarda la divisibilità per 19, per 29 e per tutti i numeri interi che terminano con la cifra 9, si rimanda alla pagina dedicata appositamente ad essi, all'indirizzo:
http://integernumbers.org/diciannove.htm

Vincenzo Vitale: insegnante di matematica   OoooO   mp3, arpista: Laura Vitale