

Vincenzo Vitale

L'algebra nella scuola media

Libro N

- Capitolo 3° -

Semplificazioni

<http://www.integernumbers.org>

vincenzovitale@integernumbers.org

tel. +039 3461424768 (WhatsApp)

Sia lode a Gesù Cristo,
unico e vero Maestro

“Libro N”

Codice: ed3uLN2020vv (1ª pubblicazione web: 13.04.2008)

© Proprietà letteraria di Vincenzo Vitale

E' vietato lo sfruttamento commerciale, anche se parziale, di questo libro e delle idee originali in esso contenute.

E' pure vietata la riproduzione del libro, anche se di una parte soltanto e in qualsiasi formato.

Se ne può avere una copia gratuita, a uso esclusivamente personale, richiedendola direttamente e soltanto all'autore:

Vincenzo Vitale

+039 3461424768 (WhatsApp)

vincenzovitale@integernumbers.org

<http://www.integernumbers.org>

Avviso:

L'autore Vincenzo Vitale pubblica solo ed esclusivamente nel suo sito personale: <http://www.integernumbers.org> e offre gratis le sue opere ai richiedenti.



L'algebra nella scuola media



Nel corso degli anni della mia impegnativa professione di insegnante di scuola media ho intrapreso una ricerca didattica su come avviare negli alunni un proficuo processo di educazione matematica.

L'indagine è stata svolta muovendomi tra i banchi, a stretto contatto con i problemi e le difficoltà dei ragazzi, così da riuscire a capire, nel corso di ogni lezione, ciò che essi effettivamente riuscivano a recepire e cosa doveva essere fornito a sostegno dei loro processi logico-deduttivi.

Rispecchiando il più fedelmente possibile le lezioni svolte in classe, ho raccolto le mie esperienze didattiche in alcuni manuali:

"Matematica, il libro N"

"Matematica, il libro Q+"

"Matematica, il libro R"

Chi fosse interessato a quest'opera, può iniziare con le due unità didattiche del libro N, la 3^a e la 4^a, rivolta ad alunni di 1 media.

- 3^a Unità : Operazioni dirette e semplificazioni in N

- 4^a Unità: Operazioni inverse ed equazioni in N

La relazione che espongo qui con il titolo "Semplificazioni" è tratta dalla 3^a unità didattica.

Le unità didattiche precedenti sono dedicate al concetto di numero naturale e allo studio delle impareggiabili regole su cui poggia la numerazione posizionale, in qualsiasi base.

Lo scopo della 3^a unità didattica è di mettere in risalto una caratteristica fondamentale della matematica: la semplificazione di scrittura di lunghe stringhe di numeri e simboli.

Semplificazioni

Stabilito il concetto di numero naturale, nasce il bisogno di indicare graficamente la quantità delle unità rappresentate da ciascuno di essi.

Inizialmente si è assolto a questo compito tracciando, in corrispondenza biunivoca, tante aste quanti sono gli oggetti da contare. (*Le aste schematizzano le dita delle mani usate come primo strumento di calcolo*).

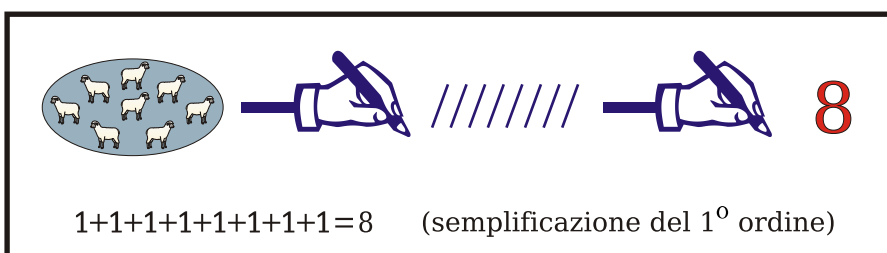
Il concetto quantitativo di un insieme di oggetti costituisce la prima astrazione: non si disegnano più gli oggetti in considerazione, ma si indicano solo le loro unità.

Fintantoché le unità da rappresentare sono poche, questo procedimento grafico è abbastanza agevole, diventa complesso quando invece le unità sono molte.

Il problema di scrivere i numeri naturali in modo conciso è stato affrontato nel corso dei secoli con l'invenzione di vari sistemi di numerazione ed è approdato infine al nostro sistema posizionale, decimale per gli umani, binario per le macchine.

Semplificazione del 1° ordine

La scrittura in cifre è un metodo convenzionale di rappresentare i numeri naturali in modo conciso: pochi simboli sostituiscono molte unità grafiche.



Il riquadro esprime la dinamica avvenuta nel corso dei secoli. La quantità infine è rappresentata sinteticamente da un simbolo grafico convenzionale: astratto, perché esula dalla fisicità degli oggetti; generale, perché si riferisce alla classe [8] di tutti gli insiemi equipotenti di otto unità.

Definizione

La rappresentazione simbolica in cifre di un numero naturale è una semplificazione del 1° ordine.

Con la semplificazione del 1° ordine si passa dal disegno schematico rappresentativo della realtà al simbolismo concettuale astratto.

Nella nostra numerazione decimale, un'uguaglianza in cui a primo membro c'è un'addizione con gli addendi tutti uguali ad 1 coincide con questo tipo di semplificazione:

$$1+1+1+1+... = n$$

Nella scrittura convenzionale in cifre il numero 1 sostituisce le aste e il simbolo + esprime l'atto del contare.

Semplificazioni del 2° ordine

Consideriamo adesso le addizioni in cui gli addendi non sono tutti uguali ad 1.

esempi

$$8+3 ; 5+4+9 ; 7+1+3+6$$

Queste addizioni si possono ricondurre al caso precedente:

- scomponiamo ciascun addendo nella somma di unità;
- contiamo poi tutte le unità ottenute e trascriviamole in modo sintetico, secondo le regole della nostra numerazione decimale posizionale.

$$8+3=(1+1+1+1+1+1+1+1)+(1+1+1)=11$$

8 e 3 sono il risultato di due conteggi fatti separatamente. Il segno + posto tra essi indica che dopo avere contato fino a 8 si deve continuare a contare, aggiungendo progressivamente altre 3 unità.

(Il funzionamento dell'abaco che poi, con l'uso sempre più ordinario di carta e penna, diventerà l'algoritmo dell'addizione, è argomento di una precedente unità didattica)

$$5+4+9=(1+1+1+1+1)+(1+1+1+1)+(1+1+1+1+1+1+1+1)=18$$

$$7+1+3+6=(1+1+1+1+1+1+1)+1+(1+1+1)+(1+1+1+1+1+1)=17$$

Definizione

L'operazione di addizione, quando gli addendi da sommare non sono tutti uguali ad 1, è una semplificazione del 2° ordine.

Semplificazioni del 3° ordine

Nelle addizioni può accadere che si formi una lunga stringa di addendi tutti uguali: immaginiamo che essi siano centinaia, o migliaia, o quanti se ne vogliano.

(Si esclude il caso, considerato prima, che gli addendi siano uguali ad 1).

esempi

$$7+7+7+7+7+7+7+7+7+7+7+7+7$$

$$7+7+7+7+7+7+... \rightarrow \text{milioni di volte}$$

Anche in questa occasione, analogamente a quanto si è

fatto con le semplificazioni del 1° ordine, si deve cercare un metodo per renderne più semplice la scrittura.

In modo del tutto convenzionale, si stabilisce la seguente

Regola

Se gli addendi sono tutti uguali, l'operazione di addizione si deve semplificare:

- l'addendo che si ripete si scrive una sola volta, facendolo precedere dal numero che indica quante volte esso si ripete;

- tra i due numeri si mette un punto che indica la semplificazione eseguita.

$$7+7+7+7+7+7+7+7+7+7+7+7+7=13\cdot7$$

$$7+7+7+7+7+7+7+7+7+7+\dots=1.000.000\cdot7$$

(un milione di volte)

Definizioni:

- Si dice moltiplicazione l'operazione che semplifica l'addizione quando i suoi addendi sono tutti uguali.

- L'operazione di moltiplicazione è una semplificazione del 3° ordine.

Considerando che la regola di semplificazione del 3° ordine è valida per qualunque valore numerico, si può generalizzare la procedura usando le lettere.

Si chiederà quindi ai ragazzi di semplificare la seguente espressione letterale:

$$a+a+a+a+a+a+a+a+a$$

La lettera a indica un numero intero qualsiasi, non importa saperne il valore, ma il ruolo che ricopre.

Dato che le a di questa espressione sono legate tra loro dal segno + dell'addizione, esse rappresentano degli addendi.

Osservando poi che questi addendi sono tutti uguali, l'addizione si dovrà semplificare nel rispetto della regola stabilita:

$$a+a+a+a+a+a+a+a+a=9\cdot a$$

Con l'uso delle lettere si fa un altro passo avanti nel processo di astrazione: la rappresentazione letterale esula

dalla stessa “quantità”, caratteristica del concetto di numero, e si rivolge alla struttura algebrica: l’interesse adesso si accentra sulle proprietà strutturali dell’insieme N .

Attenzione a un errore grave! commesso spesso dai libri di testo: mescolare numeri interi, numeri razionali e irrazionali come se fossero la stessa cosa.

Non si può pretendere che i ragazzi di 11 anni riescano a districarsi agevolmente tra i vari insiemi numerici!

Si pensi che:

- la scoperta dei numeri irrazionali ha messo in crisi la Scuola Pitagorica e la matematica dei Greci;
- si è dovuto arrivare ai tempi moderni per concepire i numeri relativi e lo stesso numero zero.

In prima media è necessario iniziare lo studio della matematica solo ed esclusivamente nell’insieme N . Si passerà negli anni successivi e gradualmente agli altri insiemi numerici Q , Z e R .

I numeri naturali rientrano nella sfera cognitiva dei ragazzi di prima media: hanno un riscontro quantitativo negli insiemi di oggetti concreti. Cosicché in N , nel momento in cui l’insegnante si impegnerà a fare scoprire le proprietà delle varie operazioni, potranno fare delle rapide verifiche sperimentali.

Per stimolarli all’osservazione e a dedurre, generalizzandole, le proprietà dell’addizione si potrà chiedere di semplificare delle espressioni numeriche e letterali come quelle che seguono.

- 1) $5+5+5+5+5+5+6+6+6+6+6+6+6+6+9+9+9$
- 2) $a+a+a+a+b+b+b+b+b+b+c+c+c+c+c+c+c+c$
- 3) $4+5+4+6+4+5+6+5+6+4+6+4+5+5+6+6+5+5+6+6$
- 4) $a+b+a+c+a+b+c+b+c+a+a+b+b+c+c+b+b+c$

In queste espressioni gli addendi non sono tutti uguali per cui sarà necessario discutere sulla richiesta fatta per stabilire se è conforme alle regole di semplificazione stabilite.

Stimolati ad esprimere le loro opinioni e a verificarle con prove pratiche, si darà ai ragazzi l’opportunità di dedurre che l’addizione ha, sia la proprietà commutativa, sia la proprietà associativa.

Quindi, stabilito che è corretto associare tra loro gli addendi uguali, nella prima e seconda espressione si eseguiranno delle semplificazioni parziali del 3° ordine.

$$1) (5+5+5+5+5)+(6+6+6+6+6+6+6)+(9+9+9)= \\ = 6 \cdot 5 + 8 \cdot 6 + 3 \cdot 9$$

$$2) (a+a+a+a)+(b+b+b+b+b+b)+(c+c+c+c+c+c+c+c)= \\ = 4 \cdot a + 6 \cdot b + 8 \cdot c$$

Anche nella terza e quarta espressione sarà possibile eseguire delle semplificazioni parziali del 3° ordine.

Infatti, grazie alla proprietà commutativa, tutti gli addendi tra di loro uguali si potranno avvicinare, mettendoli uno di seguito all'altro.

$$3) 3+5+3+5+6+6+5+6+3+6+3+5+5+6+6+5+5+6+6= \\ =(3+3+3+3)+(5+5+5+5+5+5+5)+(6+6+6+6+6+6+6+6)= \\ = 4 \cdot 3 + 7 \cdot 5 + 8 \cdot 6$$

$$4) a+b+a+c+a+b+c+b+c+a+a+b+b+c+c+b+b+c= \\ =(a+a+a+a+a)+(b+b+b+b+b+b+b)+(c+c+c+c+c+c+c)= \\ = 5 \cdot a + 7 \cdot b + 6 \cdot c$$

Dopo avere eseguito le semplificazioni numeriche si potrà chiedere l'esecuzione dei calcoli delle espressioni ottenute. Sarà una buona occasione per stabilire in quale ordine si devono eseguire le due operazioni in esse presenti.

Per raggiungere tale obiettivo inizialmente è preferibile proporre una espressione come questa: $3+4 \cdot 5$

Per coloro che non conoscono la regola di calcolo, la risposta ricorrente è: $3+4 \cdot 5=35$

Per indurli alla riflessione si chiederà allora di ripetere i calcoli usando la calcolatrice.

Il risultato $3+4 \cdot 5=23$, ottenuto questa volta, accenderà il dibattito: qual è il risultato giusto?

Per risolvere il dilemma sarà sufficiente suggerire di scomporre la semplificazione del 3° ordine in una somma di addendi uguali e di eseguire nuovamente i calcoli:

$$3+4 \cdot 5=3+4+4+4+4+4=23$$

In questo modo si darà la possibilità di dedurre che è necessario eseguire prima la moltiplicazioni e poi l'addizione.

Questo semplice esercizio darà anche l'opportunità di introdurre l'uso delle parentesi: $(3+4) \cdot 5=35$

Semplificazioni del 4° ordine

Consideriamo ora delle espressioni di questo tipo:

1) $3 \cdot 4 + 5 \cdot 4 + 7 \cdot 4$

2) $3 \cdot a + 4 \cdot a + a$

La richiesta è di riflettere sulla possibilità di eseguire un'ulteriore semplificazione di scrittura, oltre a quella già presente in ciascuna di esse.

Pensandoci bene, ciascuna moltiplicazione è il risultato di una semplificazione del 3° ordine, per cui, con procedimento inverso, si può scomporre in una addizione.

La lunga stringa di addendi uguali che ne risulterà si ricomporrà poi in un'unica semplificazione del 3° ordine.

1) $3 \cdot 4 + 5 \cdot 4 + 7 \cdot 4 =$

$$= (4+4+4) + (4+4+4+4+4) + (4+4+4+4+4+4+4) = 15 \cdot 4$$

2) $3 \cdot a + 4 \cdot a + a = (a+a+a) + (a+a+a+a) + a = 8 \cdot a$

Queste operazioni di decomposizione e ricomposizione, chiarite le idee, saranno fatte soltanto mentalmente e in seguito si chiederà di trascrivere subito le semplificazioni finali.

Definizione:

La semplificazione di più semplificazioni del 3° ordine è del 4° ordine.

Per indurre gli alunni a riflettere sulla proprietà commutativa della moltiplicazione, si può proporre di semplificare delle espressioni numeriche di questo tipo:

$$4 \cdot 13 + 13 \cdot 5 + 6 \cdot 9 =$$

$$= 4 \cdot 13 + 5 \cdot 13 + 6 \cdot 9 = 9 \cdot 13 + 6 \cdot 9 = 13 \cdot 9 + 6 \cdot 9 = 19 \cdot 9$$

Semplificazioni del 5° ordine

Analogamente a quanto si è verificato precedentemente con l'addizione, adesso con la moltiplicazione può accadere che si formi una lunga stringa di fattori uguali:

$$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$$

Anche in questo caso si dovrà cercare il modo di semplificarne la scrittura, in analogia con quanto si è fatto prima.

In maniera convenzionale, si stabilirà quindi la seguente

Regola

Se i fattori sono uguali, l'operazione di moltiplicazione si deve semplificare:

- il fattore che si ripete si scrive una sola volta, facendolo seguire dal numero che indica quante volte esso si ripete;**
- per indicare l'operazione di semplificazione eseguita, il secondo numero si scrive a caratteri più piccoli, posizionandolo più in alto del precedente.**

Applicando la regola stabilita, l'espressione proposta sarà semplificata così:

$$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^{12}$$

E' ricorrente il seguente errore commesso dagli alunni:

$$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 12 \cdot 7$$

Ma, per indurli alla riflessione, basterà invitarli a calcolare separatamente i due membri dell'uguaglianza.

Si renderanno conto così, con loro grande sorpresa, quanto sia grande il numero 7^{12} . Questo numero è una potenza!

Poiché la regola è valida per qualunque valore numerico, si generalizzerà la procedura di semplificazione usando le lettere al posto dei numeri.

Si proporrà quindi di semplificare una espressione letterale di questo tipo:

$$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$$

Osservando che queste lettere sono legate tra loro dal simbolo della moltiplicazione, si converrà che le a rappresentino dei fattori, tutti uguali.

Cosicché la moltiplicazione sarà semplificata nel rispetto della regola stabilita:

$$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^{13}$$

Definizioni:

- Si dice elevazione a potenza l'operazione che semplifica la moltiplicazione quando i suoi fattori sono tutti uguali.**
- L'operazione di elevazione a potenza è una semplificazione del 5^o ordine.**

Adesso si chiederà di semplificare le seguenti espressioni numeriche e letterali.

- 1) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$
- 2) $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c$
- 3) $4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 6$
- 4) $a \cdot b \cdot a \cdot c \cdot a \cdot b \cdot c \cdot b \cdot c \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot c \cdot c \cdot b \cdot b \cdot c$

In queste espressioni i fattori non sono tutti uguali per cui sarà necessario discutere sulla richiesta, se sia lecita o no. Facendo rilevare agli alunni le analogie con quanto è avvenuto precedentemente con l'addizione, si stimoleranno ad esprimere le loro opinioni e a verificarle con delle prove pratiche.

Così si darà loro la possibilità di dedurre che anche la moltiplicazione ha, sia la proprietà commutativa, sia la proprietà associativa.

Di conseguenza saranno in grado di ricavare autonomamente i seguenti risultati.

- 1) $(5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot (6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6) \cdot (9 \cdot 9 \cdot 9) = 5^6 \cdot 6^8 \cdot 9^3$
- 2) $(a \cdot a \cdot a \cdot a) \cdot (b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b) \cdot (c \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c) = a^4 \cdot b^6 \cdot c^8$
- 3) $4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 6 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 4^5 \cdot 5^6 \cdot 6^8$
- 4) $a \cdot b \cdot a \cdot c \cdot a \cdot b \cdot c \cdot b \cdot c \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot c \cdot c \cdot b \cdot b \cdot c = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c = a^5 \cdot b^7 \cdot c^6$

Semplificazioni del 6° ordine

Consideriamo delle espressioni di questo tipo:

- 1) $3^4 \cdot 3^7 \cdot 3^5$
- 2) $a^3 \cdot a^4 \cdot a$

La richiesta da fare agli alunni è di esaminare ciascuna di esse e di riferire le proprie osservazioni.

Un'altra richiesta sarà di ricercare le analogie con quanto fatto prima riguardo alle semplificazioni del 4° ordine.

Constatato che in ciascuna di queste espressioni sono presenti delle semplificazioni del 5° ordine, rappresentate da potenze che hanno la stessa base, si chiederà poi di valutare la possibilità di operare ulteriori semplificazioni.

Riflettendo sul significato dell'elevazione a potenza, risultato di una semplificazione del 5^o ordine, con procedimento inverso, in ciascuna delle due espressioni si può pensare di scomporre ogni potenza in una moltiplicazione.

La lunga stringa di fattori uguali che si formerà si ricomporrà poi in un'unica semplificazione del 5^o ordine.

$$1) \quad 3^4 \cdot 3^7 \cdot 3^5 = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = 3^{16}$$

$$2) \quad a^3 \cdot a^4 \cdot a = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a \cdot a) \cdot a = a^8$$

Queste operazioni di decomposizione e ricomposizione, chiarite le idee, saranno fatte solo mentalmente, cosicché in seguito si chiederà agli alunni di trascrivere solo i risultati finali.

Definizione:

La semplificazione di più semplificazioni del 5^o ordine è del 6^o ordine.

Qui di seguito si propongono delle semplificazioni numeriche e letterali più impegnative.

Si deve tenere presente che finora non sono state formalizzate regole di calcolo, ciò per impedire ai ragazzi il calcolo meccanico e privo di riflessione.

Accadrà così che quelli che non hanno ben chiare le idee saranno indotti a facili errori, facendo confusione tra le semplificazioni dei vari ordini.

Con queste richieste di semplificazione l'obiettivo da raggiungere è di allenare gli alunni a trovare le giuste soluzioni con procedimenti essenzialmente deduttivi, così da renderli pienamente consapevoli del significato delle singole operazioni e delle loro proprietà.

$$1) \quad 3^5 + 3^5 + 3^5 + 3^5 + 3^5 + 3^5 + 3^5 + 3^5 + 3^5 = 9 \cdot 3^5$$

In questa espressione ci sono delle potenze, tutte con le basi uguali, ma si deve osservare che l'operazione che li tiene assieme non è la moltiplicazione.

L'attenzione va invece rivolta all'operazione di addizione, costituita da addendi tutti uguali.

Ne consegue che ciò che è giusto fare è una semplificazione del 3^o ordine.

$$\begin{aligned}
 2) \quad & 3^5+3^5+3^5+3^5+3^5+3^5+9^5+9^5+9^5+9^5+11^5+11^5= \\
 & =(3^5+3^5+3^5+3^5+3^5+3^5)+(9^5+9^5+9^5+9^5)+(11^5+11^5)= \\
 & =6\cdot 3^5+4\cdot 9^5+2\cdot 11^5
 \end{aligned}$$

Questa espressione va ricondotta alla precedente e in più occorre applicare la proprietà associativa dell'addizione. Cosicché saranno eseguite delle semplificazioni parziali del 3^o ordine.

Effettuata la semplificazione, si potrà chiedere di eseguire i calcoli dell'espressione numerica finale. Sarà una buona occasione per stabilire la precedenza da dare alle tre operazioni in essa presenti.

$$3) \quad 3^5\cdot 3^5\cdot 3^5\cdot 3^5\cdot 3^5\cdot 3^5\cdot 3^5\cdot 3^5\cdot 3^5=3^{9\cdot 5}=3^{45}$$

Questa espressione va confrontata con la n.1 per stabilirne la differenza.

Adesso la semplificazione giusta è quella 6^o ordine.

Si potrà poi chiedere di eseguire il calcolo numerico, allo scopo di far notare quanto possano essere grandi i numeri rappresentati dalle potenze.

$$\begin{aligned}
 4) \quad & 11^3\cdot 11^3\cdot 11^3\cdot 11^3\cdot 11^3+11^3\cdot 11^3\cdot 11^3\cdot 11^3+11^3\cdot 11^3= \\
 & =11^{15}+11^{12}+11^6
 \end{aligned}$$

In questa espressione compaiono tutte e tre le operazioni dirette e il suo svolgimento, a giudicare di quanto avviene in classe, contribuisce egregiamente agli scopi prefissati.

$$\begin{aligned}
 5) \quad & 5+5+5+5+5+5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5+5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5+5+5+5+5+5= \\
 & =(5+5+5+5+5)+(5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5)+(5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5)+(5+5+5+5+5)= \\
 & =5\cdot 5+5^5+5^5+5\cdot 5=5^2+5^5+5^5+5^2=2\cdot 5^2+2\cdot 5^5
 \end{aligned}$$

Questa espressione offre la possibilità di eseguire ulteriori semplificazioni dopo la prima.

Nei casi in cui si renderà necessario, sarà utile ricorrere alle parentesi per fissare meglio le idee nel distinguere i fattori dagli addendi.

$$6) \quad 5\cdot 13^{11}+3\cdot 13^{11}+4\cdot 13^{11}+13^{11}=13\cdot 13^{11}=13^{12}$$

In questa espressione va fatta prima una semplificazione del 4^o ordine e dopo una del 5^o ordine.

$$\begin{aligned}
 7) \quad & 5 \cdot 6^3 \cdot 6^5 + 3 \cdot 17^8 + 3 \cdot 6^8 + 3 \cdot 17^2 \cdot 17^5 \cdot 4 \cdot 17 + 6^8 + 17^8 + 6 \cdot 17^8 = \\
 & = 5 \cdot 6^8 + 3 \cdot 17^8 + 3 \cdot 6^8 + 12 \cdot 17^8 + 6^8 + 17^8 + 6 \cdot 17^8 = \\
 & = (5 \cdot 6^8 + 3 \cdot 6^8 + 6^8) + (3 \cdot 17^8 + 12 \cdot 17^8 + 17^8 + 6 \cdot 17^8) = \\
 & = 9 \cdot 6^8 + 22 \cdot 17^8
 \end{aligned}$$

In questa espressione conviene eseguire prima le semplificazioni del 6^0 ordine e dopo quelle del 4^0 , tenendo conto delle proprietà delle operazioni.

Una volta allenati con le espressioni numeriche, si potrà passare a quelle letterali corrispondenti, ma è preferibile alternarle di volta in volta.

$$3) \quad a^3 + a^3 + a^3 + a^3 + a^3 + a^3 + a^3 + a^3 + a^3 + a^3 + a^3 + a^3 + a^3 + a^3 + a^3 = 15 \cdot a^3$$

$$2) \quad a^3 \cdot b^3 + a^3 \cdot b^3 + a^3 \cdot b^3 + a^3 \cdot b^3 + a^3 \cdot b^3 + a^3 \cdot b^3 + a^3 \cdot b^3 + a^3 \cdot b^3 = 7 \cdot a^3 \cdot b^3$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad & a^3 \cdot b^4 + x^5 \cdot y^6 + a^3 \cdot b^4 + x^5 \cdot y^6 + a^3 \cdot b^4 + a^3 \cdot b^4 + x^5 \cdot y^6 + x^5 \cdot y^6 + a^3 \cdot b^4 = \\
 & = 5 \cdot a^3 \cdot b^4 + 4 \cdot x^5 \cdot y^6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad & 4 \cdot a \cdot b^3 + 2 \cdot x^4 \cdot y^8 + 3 \cdot a \cdot b^3 + 5 \cdot x^4 \cdot y^8 + a \cdot b^3 = \\
 & = 8 \cdot a \cdot b^3 + 7 \cdot x^4 \cdot y^8
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5) \quad & a \cdot a \cdot a \cdot a + a \cdot a^2 \cdot a + 3 \cdot b \cdot b \cdot b \cdot 4 \cdot b \cdot b + a^3 \cdot a + b \cdot b \cdot b^3 + 2 \cdot b^5 + 5 \cdot a^4 = \\
 & = a^4 + a^4 + 12 \cdot b^5 + a^4 + b^5 + 2 \cdot b^5 + 5 \cdot a^4 = \\
 & = 8 \cdot a^4 + 15 \cdot b^5
 \end{aligned}$$

Semplificazioni ad esponente

Si proporrà ai ragazzi la semplificazione di una espressione di questo tipo, invitandoli a discutere sulla procedura da seguire:

$$3^4 \cdot 3^4 \cdot 3^4 \cdot 3^4 \cdot 3^4$$

Accentrando l'attenzione sull'operazione di moltiplicazione, dalla discussione ne seguirà che la semplificazione di questa espressione può dare adito a due procedimenti risolutivi differenti.

Prima soluzione

Se si considera che ci sono cinque fattori uguali, costituiti tutti dalla potenza 3^4 , si eseguirà una semplificazione del 5^0 ordine.

In osservanza della regola stabilita, si scriverà uno solo dei fattori 3^4 seguito dal 5 ad esponente:

a) $3^4 \cdot 3^4 \cdot 3^4 \cdot 3^4 \cdot 3^4 = (3^4)^5$

In questo caso si otterrà come risultato finale una potenza che a sua volta ha per base una potenza.

Questa poi si scriverà in forma generale, dandole un nome:

$$(a^n)^m \quad \underline{\text{potenza di una potenza}}$$

Seconda soluzione

Se si considera che le potenze hanno tutte la stessa base, si potrà eseguire anche una semplificazione del 6° ordine:

b) $3^4 \cdot 3^4 \cdot 3^4 \cdot 3^4 \cdot 3^4 = 3^{4+4+4+4+4} = 3^{5 \cdot 4} = 3^{20}$

Si osserverà che ciò che è stato fatto prima riguardo agli addendi uguali si sposta ad esponente. Dato che adesso è qui che si ripetono gli addendi uguali, si eseguirà una semplificazione del 3° ordine ad esponente della base 3.

Poiché si è agito in due modi differenti, sarà necessario chiedere agli alunni di mettere a confronto la semplificazione a) con la semplificazione b) e di trarne le dovute conclusioni.

La discussione porterà ad asserire che le due semplificazioni sono equivalenti, perché indicano la stessa quantità.

A sostegno di questa deduzione si faranno delle prove pratiche eseguendo i calcoli:

a) $(3^4)^5 = (81)^5 = 3486784401$

b) $3^{20} = 3486784401$

Ne seguirà così l'uguaglianza: $(3^4)^5 = 3^{5 \cdot 4}$

E poiché questa è valida per qualsiasi valore numerico, si scriverà in forma generale con l'uso delle lettere.

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Sarà poi utile far verificare uguaglianze simili a queste:

$$(5^3)^6 = 125^6 \quad ; \quad (7^2)^3 = 117649 \quad ; \quad ((3^2)^5)^4 = (3^{10})^4$$

$$((2^3)^2)^4 = 2^{24} \quad ; \quad (((2^4)^2)^3)^2 = (2^{24})^2 \quad ; \quad ((a^n)^m)^g = a^{n \cdot m \cdot g}$$

Ora si prenderà in considerazione la seguente espressione:

$$\left(\left(\left(3^4\right)^4\right)^4\right)^4$$

L'uguaglianza stabilita prima porterà al seguente risultato:

$$c) \quad \left(\left(\left(3^4\right)^4\right)^4\right)^4 = 3^4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 3^4^5$$

Si osservi che anche in questo caso ciò che si è studiato prima riguardo ai fattori uguali si sposta ad esponente.

Dato che adesso è qui che si ripetono i fattori uguali, si eseguirà una semplificazione del 5^o ordine ad esponente.

Ciò implica che si è otterrà come risultato una potenza che ha un'altra potenza ad esponente.

Si scriverà quindi questa particolare potenza in forma generale con l'uso delle lettere e dandole un nome:

$$a^{n^m} \quad \text{potenza con potenza ad esponente}$$

A questo punto sarà necessario fare un confronto tra le due potenze:

- potenza di una potenza: $(a^n)^m$

- potenza con potenza ad esponente: a^{n^m}

La richiesta è di stabilire se queste due forme di scrittura siano equivalenti, cioè se indicano la stessa quantità.

Per ottenere la risposta si dovrà riflettere sul loro significato, cioè sui procedimenti che le hanno generate.

Come si è già stabilito $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$, quindi, nella potenza di potenza la base a si deve elevare al prodotto dei due esponenti, mentre nella potenza con potenza ad esponente la base a si deve elevare alla potenza dei due esponenti.

Una verifica numerica chiarirà meglio le idee.

Potremmo chiedere ad esempio di eseguire i calcoli di queste potenze:

$$(3^2)^5 = 3^{2 \cdot 5} = 3^{10} = 59049$$

$$3^{2^5} = 3^{32} = 1853020188851841$$

Così apparirà evidente che le due potenze sono differenti.

Si esprimerà poi il concetto in generale usando le lettere:

$$(a^n)^m \neq a^{n^m}$$

Per completare lo studio sulle potenze si chiederà di rivedere le proprietà commutativa e associativa, valide sia per l'addizione, sia per la moltiplicazione.

Ne seguirà la richiesta di stabilire se queste proprietà sono valide anche per l'operazione di elevazione a potenza.

Per dedurre le risposte si suggerirà di ricorrere a delle semplici prove pratiche, eseguendo dei calcoli di verifica a prova delle supposizioni fatte.

- Si verificherà, ad esempio, la seguente uguaglianza:

$$5^3=3^5$$

$$5^3=5\cdot5\cdot5=125 \quad ; \quad 3^5=3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3=243$$

Quindi l'uguaglianza è falsa: $2^3 \neq 3^2$

Si concluderà così che l'elevazione a potenza non ha la proprietà commutativa:

$$a^b \neq b^a$$

- Si chiederà poi di esaminare e verificare l'uguaglianza:

$$(2^3)^4=2^{(3^4)}$$

Le parentesi tonde indicano quali potenze devono essere eseguite per prime.

Se saranno fatte le giuste osservazioni, si concluderà, ancor prima di eseguire i calcoli, che l'uguaglianza non può essere vera, perché quella a primo membro è la potenza di una potenza, mentre quella a secondo membro è la potenza con potenza ad esponente.

Si effettuerà comunque una prova concreta col calcolo:

$$(2^3)^4=8^4=4096$$

$$2^{(3^4)}=2^{81}=2417851639229258349412352$$

I risultati ottenuti mostreranno in modo del tutto evidente che l'uguaglianza è falsa: $(2^3)^4 \neq 2^{(3^4)}$

Si concluderà così che l'operazione di elevazione a potenza non ha la proprietà associativa:

$$(a^b)^c \neq a^{(b^c)}$$

Si concorderà inoltre che l'espressione a^{b^c} , priva delle parentesi, indica la potenza con potenza ad esponente.

Giunti alla potenza con potenza ad esponente, la necessità di semplificare la scrittura dei numeri si può considerare appagato.

Infatti, la scrittura $10^{10^{10}}$

presa qui come esempio, rappresenta in modo succinto il numero che dopo la cifra 1 ha ben 10 miliardi di zeri!

Ciò vuol dire che se volessimo scrivere questo numero per esteso occorrerebbe una striscia di carta lunga circa quanto tutto l'equatore terrestre che misura 40.075 Km.

Pur non di meno, volendo andare oltre, l'espressione che può dare origine ad una semplificazione di tipo superiore a quella del 6° ordine ad esponente ha la forma seguente, con la a che si ripete n volte:

$$a^{a^{a^{a^{a^a}}}}$$

Numeri di quest'ordine di grandezza sono davvero enormi e sfuggono alla nostra immaginazione.

Per semplificare questa espressione, occorre trovare simboli e nomi nuovi.

Potrebbe essere semplificata, ad esempio, mettendo a destra della base a una linea curva e sopra questa il numero b che indica quante volte si ripete la a in questa potenza:

$$a^{a^{a^{a^{a^a}}}} = a^{\overbrace{a}^b}$$

A questa semplificazione, che si definirà del 7° ordine, si potrebbe dare il nome di iperpotenza.

Vincenzo Vitale

L'algebra nella scuola media

Libro V

- Capitolo 4° -

Equazioni

<http://www.integernumbers.org>

vincenzovitale@integernumbers.org

tel. +039 3461424768 (WhatsApp)